Grundriſs

der

Combinationslehre

nebſt

Anwendung derſelben

auf

die Analyſis.

BIBLIOTHEK

von

D. Conrad Diedrich Martin Stahl,

Profeſſor auf der Univerſität zu Jena.

FRIEDRICH BUCHNER.

Jena und Leipzig,

bei Chriſtian Ernſt Gabler

1800.

BIBLIOTEKA ELBLĄSKA
3184
91904

Sr. Hochwohlgebornen

dem

Herrn

Johann Wolfgang von Göthe,

Sächsisch-Weimarschen wirklichen Geheimenrathe,

dem

Verehrer und Beförderer

alles Wahren, Schönen und Guten

in tiefster Ehrfurcht

gewidmet.

Vorbericht.

Leibnitz war der Erſte, welcher die Wichtigkeit der Combinationslehre für die Analyſis ganz wahrnahm und ſich daher bemühete, ſie zu vervollkommnen und in den Stand zu ſetzen, daſs ſie auf die Analyſis überhaupt, angewandt werden könnte. Er erreichte aber ſeinen Zweck nicht, theils weil er einige combinatoriſche Operationen z. B. das Combiniren und Variiren zu beſtimmten Summen nicht in ſeine Gewalt bekam, theils auch weil er nicht auf die ſchicklichſten Zeichen verfiel. Nachher machten freilich Mehrere, von den Combinationen und Verſetzungen auf die Analyſis Anwendungen z. B. Cramer bei

dem Eliminiren der unbekannten Gröſsen und Boſcowich und Caſtillon bei der Potenzirung der Polynomien, aber an die Beſtimmung feſter Regeln für jede einzelne combinatoriſche Operation und an eine Zeichenſprache, welche den Weg der Anwendung der Combinationslehre auf die Analyſis überhaupt, gebahnt hätte, wurde nicht gedacht, ſondern man begnügte ſich mehrentheils mit der Feſtſetzung der Regeln die Anzahl der Complexionen zu beſtimmen, welche die einzelnen combinatoriſchen Operationen geben und lieſs alſo die Combinationslehre im Ganzen unbearbeitet. So war der Zuſtand dieſer Wiſſenſchaft als Hindenburg auf ihre Wichtigkeit für die Analyſis aufmerkſam gemacht wurde. Er fing ſogleich an, feſte Regeln für die einzelnen combinatoriſchen Operationen feſtzuſetzen und auf eine Zeichenſprache zu denken, durch welche ihre Anwendung auf die geſammte Analyſis möglich und leicht gemacht würde. Mit ſeinen Entdeckungen machte er uns ſeit 1778 in einzelnen Schriften bekannt, in welchen

er

nach und nach die combinatoriſchen Operationen vereinfachte, neue hinzufügte, ſeine zeichenſprache vervollkommnete und ihren Nutzen für die Analyſis durch wirkliche Anwendung darthat. Seine combinatoriſche Abhandlung die VIte in der Schrift: der Polynomiſche Lehrſatz, das wichtigſte Theorem der ganzen Analyſis, Leipzig 1796, fing aber erſt an ein allgemeines Intereſſe für ſein Syſtem zu erregen, denn auſser Hindenburgs Schülern, ſcheinen ſich vorher nur Klügel, Pfaff und Kramp ernſtlich dafür intereſſirt zu haben. Ich geſtehe es gern, daſs auch mir erſt durch dieſe Schrift die Augen geöffnet wurden, aber von dieſem Augenblicke an, habe ich auch keinen gröſsern Wunſch gehabt, als durch eine zuſammenhängende vollſtändige Darſtellung des ganzen Hindenburgiſchen Syſtems das Studium deſſelben erleichtern und dadurch mehr verbreiten zu können. Mehrere zuſammentreffende Umſtände hinderten mich eher als jetzt dieſen Wunſch zu erfüllen und erlaubten mir am Ende doch nicht ganz ſo viele Zeit auf die Ausarbeitung

tung zu verwenden, als ich dazu hätte haben müſſen. Ich ſelbſt habe daher noch manches gegen meine Schrift zu erinnern, welches aber doch nicht ſowohl die Sache ſelbſt als vielmehr die Form betrift.

Die ganze Schrift zerfällt in drei Abſchnitte: Im erſten wird von der Combinationslehre überhaupt geſprochen und eine rein arithmethiſche Abhandlung gegeben; der zweite enthält die eigentliche Combinationslehre und der dritte zeigt wie dieſe auf die Entwickelung der Produkte, der Dignitäten, der Quotienten und der Umkehrung der Reihen angewandt werden kann. — Hierbei konnte ich nur von den Combinationen und Variationen mit Wiederholungen Gebrauch machen, ich behalte es mir daher vor, in der Folge noch die Anwendung der übrigen Operationen zu zeigen.

Ich halte es für unnöthig hier ſpeciell anzugeben was mir bei dieſer Schrift eigenthümlich zugehört und würde überhaupt davon ſchweigen wenn ich nicht glaubte

zur

zur Erleichterung der richtigen Beurtheilung derſelben folgendes ſagen zu müſſen. Bei der Bearbeitung der eigentlichen Combinationslehre war mein Hauptgeſichtspunkt, Hindenburgs aufgeſtellte Sätze ſyſtematiſch darzuſtellen und ſtreng zu beweiſen; der Plan den ich hierbei vor Augen hatte, machte nothwendig, daſs ich eine rein arithmetiſche Abhandlung voranſchickte. Die Art und Weiſe überhaupt betrachtet, wie ich im dritten Abſchnitte die analytiſchen Sätze behandele iſt ganz die Hindenburgiſche; bei der nähern Entwickelung dieſer Sätze aber und bei dem ſyſtematiſchen Ableiten derſelben aus einander bin ich meinen eigenen Weg gegangen.

In Rückſicht auf den Druck muſs ich folgendes bemerken: Zu den Klaſſenzeichen und Binominalcoefficienten wollte ich zwar abſichtlich gröſsere Lettern als zur Textſchrift haben, weil mir dieſes in mehrern Hinſichten nützlich zu ſeyn ſchien z. B. um ſie deſtomehr von den Coefficienten zu unterſcheiden, wenn hierzu groſse Buchſta-

ben genommen werden; es war aber mein Wille nicht, dafs diese Lettern sich so beträchtlich durh ihre Gröfse von den übrigen auszeichnen sollten, als in dieser Schrift der Fall ist, ich wurde aber gezwungen diese Lettern zuzulassen, weil die Buchstaben $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ in der Druckerei nicht kleiner vorhanden waren. — Auf die Correctheit des Drucks habe ich zwar viele Mühe verwandt, aber demungeachtet ist es mir wegen der vielen Schwierigkeiten, welche der Druck machte, doch nicht gelungen, sie von bedeutenden Druckfehlern gänzlich frei zu machen. Es ist daher nothwendig, dafs man beim Lesen gleich anfangs auf das angehängte Verzeichnifs der Druckfehler Rücksicht nimmt.

Inhalt.

Erſter Abſchnitt.

Einleitung in die Combinationslehre.

Gegenſtand der Combinationslehre. Seite 1—3

Erklärung des arithmetiſch combinatoriſchen und rein combinatoriſchen Verfahrens. — 3—4

Angabe der arithmetiſchen Aufgaben, auf welche ſich das arithmetiſch-combinatoriſche Verfahren gründet. — 4—5

Entwickelung der Regeln wie man abſolut uud bedingt für eine Zahl die nächſtgröſsere findet. — 6—14

Aufgabe mit gegebenen Zifern entweder alle Zahlen zu ſchreiben, die ſich damit ſchreiben laſſen, oder nur die welche unter beſtimmten Einſchränkungen damit geſchrieben werden können. — 14—23

Zwei-

Zweiter Abſchnitt.

Combinationslehre.

1) Von den Complexionen überhaupt.

Erklärung der verſchiedenen Complexionen, des Wiederholungsexponenten, der Klaſſen und des Zeigers. Seite 24—28

2) Von den Involutionen und Evolutionen überhaupt.

Begriff der Involution und Eintheilung derſelben in vollſtändige und unvollſtändige. —28—31

3) Von den Verſetzungen.

Erklärung was unter Verſetzen verſtanden wird: Aufgaben alle Verſetzungen mehrerer gegebener Elemente zu finden, nebſt andern hiervon abhängenden Aufgaben: Beſtimmung der Anzahl der Verſetzungen. —32—50

4) Von den Combinationen.

Erklärung des Begriffs Combiniren, Eintheilung deſſelben und Bezeichnung der Combinationsklaſſen. —50—54

α) Von dem Combiniren überhaupt mit Wiederholungen. —54—71

β) Von dem Combiniren überhaupt ohne Wiederholungen. —72—86

γ) Von dem Combiniren zu beſtimmten Summen mit Wiederholungen. —86—120

δ) Von dem Combiniren zu beſtimmten Summen ohne Wiederholungen. —120—128

ε) Von dem Combiniren mehrerer Reihen. —128—137

5) Von den Variationen.

Erklärung und Eintheilung des Variirens, Bezeichnung der Variationsklaſſen. Seite 137—139

α) Von dem Variiren überhaupt mit Wiederholungen. —140—149

β) Von den Variiren überhaupt ohne Wiederholungen. —150—159

γ) Von dem Variiren zu beſtimmten Summen mit Wiederholungen. —159—177

δ) Von dem Variiren zu beſtimmten Summen ohne Wiederholungen. —177—181

ε) Von dem Variiren mehrerer Reihen. —181—189

6) Gleichungen für die Combinationen und Variationen.

α) Gleichungen für die Combinationen mit Wiederholungen. —190—191

β) Gleichungen für die Combinationen ohne Wiederholungen. —191—192

γ) Gleichungen für die Variationen mit Wiederholungen. —192—193

δ) Gleichungen für die Variationen ohne Wiederholungen. —193—194

Erklärung des Polynomialcoefficienten. —195

ε) Gleichungen zwiſchen Combinationen und Variationen mit Wiederholungen. —195—196

ζ) Gleichungen zwiſchen Combinationen und Variationen ohne Wiederholungen. —197

Dritter Abſchnitt.

Anwendung der Combinationslehre auf die Analyſis.

I. Erklärung analytiſcher Zeichen. Seite 199—202

II. Combinatoriſche Entwickelung der Produkte mehrerer Reihen. —202—220

III. Combinatoriſche Entwickelung der Dignitäten der Reihen. —221—252

IV. Combinatoriſche Entwickelung der Produkte der Dignitäten mehrerer Reihen. —252—271

V. Combinatoriſche Entwickelung der Quotienten mehrerer Reihen. —271—307

VI. Umkehrung der Reihen. —307—322

Verzeichniſs combinatoriſcher Schriften.

Grund-

Grundriſs
der
Combinationslehre
nebſt
Anwendung derſelben auf die Analyſis.

Erſter Abſchnitt.

Einleitung in die Combinationslehre.

§. 1.

Die Combinationslehre beſchäftigt ſich mit der Zuſammenſetzung gegebener Dinge zu mehrern Ganzen. Die gegebenen Dinge nennt ſie Elemente, bezeichnet ſie im allgemeinen mit Buchſtaben und zeigt das Zuſammenſetzen derſelben durch ein bloſses Schreiben neben einander an.

Sind mehrere Elemente a, b, c, d, e, zum Zuſammenſetzen gegeben, ſo laſſen ſich im allgemeinen hier drei Aufgaben denken:

1) Es werden alle Ganze verlangt, die ſich aus den Elementen für die Bedingung zuſammenſetzen laſſen, daſs in einem jeden Ganzen alle Elemente vorkommen, aber in dem einem immer anders als in jedem der übrigen geordnet ſeyn ſollen z, B. a b c d e und b c a d e. Die Ganzen müſſen ſich alſo bloſs durch die Form von einander unterſcheiden. Das Anordnen der gegebenen Elemente auf jede mögliche Weiſe neben einander, wird Verſetzen und eine jede der gefundenen Anordnungen eine Verſetzung genannt.

2) Es ſollen auſser den gegebenen Elementen noch alle Ganze angegeben werden, welche ſich durch die Verbindung von zwei, drei, vier Elementen u. ſ. w. unter der Bedingung darſtellen laſſen, daſs ſich keines der Ganzen von einem andern bloſs durch die Anordnung ſeiner Elemente unterſcheiden darf. Der Unterſchied der Ganzen muſs alſo nicht bloſs formell ſondern er muſs materiell ſeyn. Die Handlung wodurch man ſie erhält, heiſst Combiniren und ein jedes dadurch gefundene Ganze, eine Combination.

3) Es werden nicht nur alle materiell von einander verſchiedene Ganze verlangt, welche die Elemente a, b, c, d, e, zulaſſen, ſondern auch alle mögliche Formen dieſer Ganzen, welche das verſchiedentliche Anordnen ihrer Elemente giebt, alſo überhaupt alle formell oder materiell von einander verſchiedene Ganze, die nur immer für die gedachten Elemente ſtatt finden. Man würde hier offenbar ſeinen Zweck erreichen, wenn man erſtlich

lich alle Combinationen der Elemente und hierauf von jeder Combination wieder alle Verſetzungen aufſuchte. Es laſſen ſich aber auch beide Handlungen in eine einzige vereinigen und dieſe wird dann Variiren und ein jedes der dadurch gefundenen Ganzen eine Variation genannt.

Dieſe drei Aufgaben geben alſo überhaupt drei combinatoriſche Operationen: Verſetzen, Combiniren und Variiren und mehrere als dieſe finden daher auch nicht ſtatt. Es laſſen ſich aber die beiden letzten unter verſchiedenen Bedingungen verrichten: 1) daſs in den Combinationen und Variationen ein jedes der gegebenen verſchiedenen Elemente mehreremal, 2) daſs ein jedes darinn nur *ein* mal vorkommen darf. Dies giebt die Eintheilung des Combinirens und Variirens in Combiniren und Variiren mit und ohne Wiederholungen. 3) Eben ſo kann man auch die Bedingung hinzufügen, daſs wenn die Elemente auf beſtimmte Zahlen bezogen werden, die Summe der Elemente einer Combination oder Variation eine beſtimmte Zahl ſeyn ſoll. Hieraus entſteht die Eintheilung des Combinirens und Variirens in Combiniren und Variiren überhaupt und zu beſtimmten Summen. Bei dieſen wird auf eine Summe geſehn, bei jenen aber nicht. *a*).

§. 2.

Die combinatoriſchen Operationen laſſen ſich auf ein bloſses Aneinanderfügen und Untereinanderſetzen der Elemente ſo reduciren, daſs die Vorſchriften hierfür ganz unabhängig von Sätzen jeder Wiſſenſchaft ſind. Es iſt daher die Combinationslehre in ſofern eine ſelbſtändige Wiſſenſchaft. Der Übergang aus ihr in die Arithmetik iſt äuſserſt leicht, weil die arithmetiſchen Operationen nichts anders als bedingte combinatoriſche ſind, ſo daſs

 ſchon

a) Eine ausführlichere Erklärung der combinatoriſchen Operationen wird an gehörigen Orte gegeben werden.

schon das blosse Schreiben der Zahlen in natürlicher Ordnung eine bestimmte combinatorische Operation ist. Ja die Verbindung der combinatorischen Sätze mit den arithmetischen ist so einfach, dass man durch ein blosses bedingtes Schreiben der Zahlen alle drei genannte Operationen verrichten kann, wenn man die gegebenen zu bearbeitenden Elemente auf Zahlen bezieht. Nimmt man bei der Behandlung combinatorischer Aufgaben die Arithmetik zu Hülfe, so verfährt man arithmetisch combinatorisch, im entgegengesetzten Falle aber rein combinatorisch.

§. 3.

Die rein combinatorische Behandlung hat grosse Vorzüge vor der arithmetisch combinatorischen, weil jene einfacher und daher leichter ist und bei ihr nicht wie bei dieser eine Umsetzung der Zahlen in die gegebenen Elemente nöthig ist und weil sich bei der rein combinatorischen für die Anwendung sehr wichtige Darstellungen des Geforderten geben lassen, die sich bei der arithmetisch combinatorischen nicht darbiethen. Indessen so wahr dieses auch ist, so wird es doch bei dem Vortrage der Combinationslehre zweckmäfsig seyn die combinatorische Behandlung wenigstens nicht ganz zu übergehn um die Richtigkeit dessen, was jetzt und vorhin in §. 2. gesagt ist deutlich vor Augen zustellen. Es sollen daher von den combinatorischen Aufgaben, deren arithmetische Auflösung nicht zu verwickelt wird, sowohl arithmetisch combinatorische als rein combinatorische Auflösungen gegeben werden. Damit aber die zur arithmetischen Behandlung nothwendigen arithmetischen Aufgaben, den systematischen Vortrag der Combinationslehre nicht unterbrechen, ist es nothwendig, dass sie hier angegeben und die Wahrheiten worauf sie sich gründen, systematisch entwickelt werden.

§. 4.

Die gedachten arithmetischen Aufgaben sind solche, nach welchen mit gewissen gegebenen Zifern entweder

alle

alle Zahlen geſchrieben werden ſollen, die damit geſchrieben werden können, oder nur die Zahlen, welche ſich damit für gewiſse angegebene Bedingungen ſchreiben laſſen, aber in beiden Fällen ſo, daſs man bei dem Schreiben der Zahlen allemal von der kleinern zur gröſſern übergeht. Die erwähnten Bedingungen ſind: 1) Es ſollen in den Zahlen die Zifern ſo von der Linken nach der Rechten auf einander folgen, daſs nie eine gröſsere vor einer kleinern ſteht; d. h. die Zahlen ſollen gut geordnet ſeyn. 2) Die Summe die man durch die Addition der einzelnen Zifern der Zahlen erhält, ſoll eine gewiſse beſtimmte ſeyn. 3) Es ſoll bei gegebenen verſchiedenen Zifern keine in einer Zahl öfter als einmal vorkommen. *a*), 4) Es ſollen ſich die Zahlen nur durch die Anordnung ihrer Zifern von einander unterſcheiden.

§. 5.

Die Auflöſung dieſer Aufgaben iſt leicht ſo bald man weiſs, wie man von einer gegebenen Zahl zu der kömmt, welche von ihr, abſolut oder unter den eben (§. 4.) gedachten Bedingungen, die nächſtgröſsere iſt. Bei der Beſtimmung der Art und Weiſe wie dieſes geſchieht, ſoll ein Zahlenſyſtem mit einer unbeſtimmten Anzahl von Grundzeichen zum Grunde liegen, es ſollen aber in dieſem Syſteme, wie bei dem gewöhnlichen, die Werthe der Zifern einer Zahl wachſen, deſto weiter ſie ſich in ihr, in Rückſicht auf ihre Stelle, von der erſten Stelle zur Rechten befinden. Zu den Beiſpielen wird das decadiſche gebraucht.

a) Wenn eine combinatoriſche Aufgabe die dritte Bedingung enthält, ſo wird ihre arithmetiſche Auflöſung mühſam; ſolche combinatoriſche Aufgaben werde ich daher nur rein combinatoriſch auflöſen und ſie deswegen unter den arithmetiſchen Aufgaben übergehn.

Entwickelung der Regeln wie man absolut und bedingt (§. 5.) für eine Zahl die nächst gröfsere findet.

§. 6.

1. *Satz.*

Eine m + 1 zifrige Zahl ist gröfser als jede *m*zifrige.

2. *Satz.*

Schreibt man eine gewifse Zifer p sowohl vor eine gröfsere als kleinere *m*zifrige Zahl, so ist die m + 1 zifrige, welche aus der gröfsern *m*zifrigen entsteht, gröfser als die welche man aus der kleinern *m*zifrigen erhält.

3. *Satz.*

Wenn sich zwei m + 1 zifrige Zahlen blofs dadurch von einander unterscheiden, dafs sich die eine mit q und die andere mit p anfängt, so ist die mit der Anfangszifer q gröfser als die mit der Anfangszifer p, wenn q gröfser als p ist. Z. B. 35426 ist gröfser als 25426. (2. Satz).

4. *Satz.*

Eine Zahl wird gröfser wenn man für irgend eine ihrer Zifern eine gröfsere setzt und sie wächst um desto weniger, desto kleiner die substituirte und desto geringer die Ordnung der Zifer ist, für welche man substituirt hat. Man vergröfsert daher eine Zahl durch Substitution einer Zifer so wenig als möglich, wenn man in die Stelle der Zifer, welche die geringste Ordnung hat, eine um 1 gröfsere Zifer setzt.

5. *Satz.*

Eine Zahl wird gröfser, wenn irgend eine ihrer Zifern vergröfsert wird, wenn man auch gleich alle Zifern geringerer Ordnung verkleinert. Es ist z. B. 235999 kleiner als 236111.

6. *Satz.*

Wenn man in einer Zahl eine Zifer der pten Ordnung vergröfsert, so wird hierdurch relativ die geringste Vergröfserung der Zahl bewirkt, wenn für alle Zifern geringerer Ordnung, die geringste Zifer gesetzt wird, (5. Satz). Will man daher von einer Zahl die nächstgröfsere haben und die letzten *m* Zifern lafsen keine Vergröfserung mehr zu, so mufs man für die welche, von der letzten angerechnet, die m + 1te ist die nächstgröfsere Zifer schreiben, und für jede der gedachten *m* Zifern, die geringste substituiren, Sollte aber gar keine Zifer eine Vergröfserung zulafsen, so mufs man ihnen 1 vorschreiben und in ihre Stelle die geringste Zifer setzen. *a*). z. B. die nächstgröfsere Zahl für 139 ist 140, für 1399 die Zahl 1400 und für 999 die Zahl 1000.

7. *Satz.*

Eine Zahl wird verkleinert, wenn man eine Zifer der pten Ordnung kleiner macht, wenn auch schon für alle Zifern geringerer Ordnung gröfsere substituirt werden z. B. Es ist 234999 kleiner als 235231.

8. *Satz.*

Wird in einer Zahl für eine Zifer der pten Ordnung eine kleinere Zifer gesetzt, so wird hierdurch relativ die geringste Verkleinerung der Zahl verursacht, wenn man für die Zifern geringerer Ordnung die gröfste Zifer schreibt. (7. Satz).

9. *Satz.*

Wenn man aus einer Zahl durch Vergröfserung einer Zifer der pten Ordnung eine gröfsere machen will, ohne doch die Summe der Zifern zu verändern, so mufs man nach geschehener Vergröfserung, mit Zifern eine Verklei-

 nerung

a) Absolut genommen soll unter der geringsten Zifer, 0 verstanden werden. Bei der Anwendung dieser Sätze aber, wird es jedesmal von der Aufgabe abhängen, welchen Werth die geringste Zifer haben soll. Dies letzte gilt auch von der höchsten Zifer.

nerung vornehmen, deren Ordnung geringer als die pte ist. Denn soll die Summe unverändert bleiben, so muss wegen der Vergrösserung der Zifer der pten Ordnung nothwendig mit einer oder mehrern der andern Zifern eine Verkleinerung vorgenommen werden. Hierzu darf man aber keine Zifer nehmen, welche eine höhere Ordnung hat als die vergrösserte, weil dadurch die ganze Zahl abnähme, folglich muss die Verkleinerung mit solchen Zifern geschehn, deren Ordnung geringer als die pte ist. (7. Satz).

10. *Satz.*

Um daher eine Zahl zu vergrösern ohne doch die Zifernsumme zu ändern, darf man keine Vergrösserung mit der Zifer der geringsten Ordnung vornehmen.

11. *Satz.*

Will man also aus einer Zahl, ohne die Zifernsumme zu verändern, die nächstgrösere machen nnd die letzte Zifer läst noch eine Verkleinerung zu, so muss man die vorletzte um 1 vergrösern uud die letzte um 1 verkleinern.

12. *Satz.*

Wenn sich eine Zahl mit m gleichen Zifern endigt, die keine Verkleinerung mehr zulassen und es soll hieraus dadurch eine grösere Zahl der nämlichen Zifernsumme gemacht werden, dass man für eine Zifer eine grösere substituirt, so muss die Substitution für eine Zifer geschehn. die wenigstens m + 2 Stellen von der letzten Zifer entfernt ist. Denn nach geschehener Substitution muss wenigstens *eine* Zifer verkleinert werden; diese kann aber keine von den genannten m Zifern seyn, folglich muss sie von der Letzten an gerechnet wenigstens die m + 1te Stelle haben und daher ist klar, dass die vergrösserte wenigstens die m + 2te Zifer von der Letzten angerechnet seyn müsse. (9. Satz.)

13. *Satz.*

Wenn die letzten m gleichen Zifern keine Verkleinerung mehr zulassen, so erhält man die nächstgrösere

der

der nämlichen Zifernſumme, wenn man die m + 2te von der letzten Zifer angerechnet, um 1 vergröſsert und für alle Zifern geringerer Ordnung, die geringſte Zifer ſetzt, auſser der letzten für welche das Supplement zur Zifernſumme der gegebenen Zahl, geſetzt werden muſs. (10. Satz, 4. Satz, 5. Satz). Z. B. für 1235000 iſt die nächſtgröſsere Zahl der nämlichen Zifernſumme dieſe: 1240004.

14. *Satz.*

a) wenn eine Zahl gutgeordnet iſt und man vergröſsert ihre Zifer der *m*ten Ordnung um 1, ſo daſs ſie gleich p wird, ſo muſs man, wenn durch die geſchehene Vergröſserung der Zifer relativ die geringſte Vergröſserung der Zahl und zugleich eine gutgeordnete Zahl entſtehn ſoll, für alle Zifern deren Ordnung geringer als die mte iſt, p ſubſtituiren. Denn ſoll die Zahl eine gutgeordnete bleiben ſo dürfen der Zifer p nach der Rechten hin, keine kleinere Zifern folgen als p iſt, folglich iſt p die kleinſte welche für die Zifern ſubſtituirt werden kann, deren Ordnung geringer als die mte iſt, und daher giebt auch dieſe Subſtitution für die geſchehene Vergröſserung, die geringſte Zahl. Wird z. B. in der Zahl 2568 die Zifer 5 um 1 vergröſsert ſo iſt für dieſe Subſtitution die nächſtgröſsere gutgeordnete Zahl dieſe: 2666.

b) Wenn alſo die letzten *m* Zifern keine Vergröſserung mehr zulaſſen, ſo erhält man die nächſtgröſsere gutgeordnete Zahl, wenn man für die Zifer, welche von der letzten angerechnet, die m + te iſt, die nächſtgröſsere z ſetzt und dieſe z auch in die Stelle der letzten m Zifern ſchreibt. Läſst aber keine Zifer der Zahl eine Vergröſserung zu, ſo bekömmt man die nächſtgröſsere gutgeordnete Zahl, wenn man ihr 1 vorſchreibt und auch für jede der gedachten Zifern 1 ſetzt. Z. B. die nächſtgröſsere gutgeordnete Zahl für 129 iſt 133, für 1299 die Zahl 1333 und für 999 die Zahl 1111.

15. *Satz.*

Wenn eine gutgeordnete Zahl sich mit m gleichen Zifern endigt und man vergrösert die Zifer welche von der letzten angerechnet die m + 1te und um 1 kleiner als jede jener m Zifern ist, um die Einheit, so muss man alle übrige Zifern unverändert lassen, wenn man für jene Substitution die geringste Vergrösserung haben und zugleich eine gutgeordnete Zahl behalten will (14. Satz). Die Zifernsumme der hierdurch erhaltenen Zahl ist um 1 grösser als die Zifernsumme der Zahl, woraus sie gemacht ist.

16. *Satz.*

Ist die Zifer der mten Ordnung einer gutgeordneten Zahl kleiner als die Zifern geringerer Ordnung und zwar wenigstens um 2 kleiner als die letzte und man setzt für diese Zifer der *m*ten Ordnung die nächstgrösere p und schreibt für die zu ihrer Rechten befindlichen Zifern, ebenfalls p, so entsteht eine gutgeordnete grösere Zahl, deren Zifernsumme entweder so gros oder kleiner als die Zifernsumme der gegebenen Zahl ist.

17. *Satz.*

Aus einer gutgeordneten Zahl macht man die nächstgrösere gutgeordnete mit unveränderter Zifernsumme, wenn man erstlich von der letzten an, die nächste Zifer p aufsucht, welche wenigstens um 2 kleiner ist als diese letzte und hierauf für diese gefundene Zifer p die nächstgrösere q substituirt und diese q auch in die Stelle der Zifern setzt, welche auf p, nach der Rechten hin, folgen, die letzte ausgenommen, für die man das Supplement zur Zifernsumme setzen muss. Denn desto näher die Zifer p. welche man vergrösert bei der letzten steht, um desto weniger wird die Zahl vergrösert (1. Satz). Ist diese Vergrösserung vorgenommen und aus p, q geworden, so muss für die folgenden wegen 14 Satz, auch q geschrieben werden. Es muss aber gedachte p wenigstens um 2 kleiner seyn, als die letzte, weil durch das

vor-

vorgeschriebene Verfahren, wenn sie nur um 1 gröfser wäre, eine Zahl entstünde, deren Zifernsumme gröfser wäre als die der gegebenen Zahl (15. Satz). Ist sie aber um 2 kleiner als die letzte, so entsteht durch die vorgeschriebene Substitution eine Zahl mit einer entweder eben so grofsen oder mit einer kleinern Zifernsumme (16. Satz). Im ersten Falle ist sie dann die gesuchte Zahl und im zweiten Falle braucht nur die Summe auf die vorhingedachte Weise supplirt zu werden. Z. B. Für 23478 ist die nächstgröfsere gutgeordnete mit der nämlichen Zifernsumme, die Zahl 23559.

Anmerkung.

Sollte bei einem bestimmten Falle das Supplement gröfser werden als der Werth der höchsten Zifer beträgt, so mufs das Supplement so unter die Zifern der geringsten Ordnung vertheilt werden, dafs man von der letzten Zifer an, so viel zu einer jeden addirt, als sich nur immer zur letzten, vorletzten u. s. w. addiren läfst, ohne dafs die Summe den Werth der höchsten Zifer übersteigt. Denn durch die Vertheilung des Supplements auf die vorgeschriebene Weise, wird die Summe vollständig und dadurch die Zahl am geringsten vergröfsert, weil man mit der Vertheilung des Supplements bei der Zifer der geringsten Ordnung den Anfang macht, und jeder so viel davon giebt als sich ihnen nur immer geben läfst ohne den Werth der höchsten Zifer zu übersteigen. Auch erhellet, dafs hierbei die Zahl gutgeordnet bleibt. Z. B. Es ist bei dem decadischen Systeme von 125556 die nächstgröfsere gutgeordnete Zahl der nämlichen Zifernsumme, diese: 133359.

18. *Satz.*

Wenn die Zifern einer Zahl von der Linken nach der Rechten so auf einander folgen, dafs allemal die kleinere auf die gröfsere folgt, so ist sie unter allen den Zahlen, die mit diesen Zifern geschrieben werden können, die gröfste.

19. *Satz.*

Sind die Zifern einer Zahl gutgeordnet, so hat die Zahl unter allen denen, die sich mit diesen Zifern schreiben lassen, den geringsten Werth.

20. *Satz.*

Sind die Zifern einer Zahl nicht, wie im 18ten Satze angegeben ist, unter sich geordnet, so läfst sich mit den Zifern eine noch gröfsere Zahl schreiben, als die gegebene ist.

21. *Satz.*

Eine Zahl kann durch ein blofses Vertauschen ihrer Zifern gegen einander vergröfsert werden, wenn ihre Zifern nämlich die Stellung unter sich haben, dafs nicht allemal die kleinere auf die gröfsere folgt.

22. *Satz.*

Eine Zahl wird durch ein Umtauschen ihrer Zifern gegen einander nur dann vergröfsert, wenn hierbei in die Stelle derjenigen Zifer eine gröfsere gesetzt wird, welche unter den umgetauschten die höchste Ordnung hat (5. Satz, 7. Satz).

23. *Satz.*

Wird eine Zahl durch Umtauschen der Zifern vergröfsert, so wächst sie dadurch um desto mehr, desto höher die Ordnung der Zifer ist, die unter den umgetauschten die höchste Ordnung hat. Will man daher eine Zahl durch Verwechselung der Zifern so wenig als möglich vergröfsern, so mufs man sich hierbei auf die Zifern der geringsten Ordnung einzuschränken suchen. Wie viele dieser Zifern hier erforderlich sind, findet man offenbar, wenn man von der Rechten nach der Linken grade nur so viele Zifern abschneidet, als hinreichend sind um eine Zahl zu erhalten, die sich durch das Vertauschen ihrer Zifern vergröfsern läfst. (19. Satz, 20. Satz.)

24. *Satz.*

Hat man eine Zahl deren erste Zifer z kleiner ist als die nächstfolgende und es sind die Zifern welche auf die erste folgen so geordnet wie im 18ten Satze angenommen wurde, so macht man hieraus die nächstgrösere Zahl, welche man durch eine blosse Vertauschung der Zifern bekommen kann, wenn man für die erste z diejenige substituirt, welche unter den Zifern zu ihrer Rechten die nächstgrösere ist und hierauf z nebst den übrigen nach dem 19 Satze geordnet, neben die substituirte schreibt. Denn ohne Vertauschung der ersten Zifer kann mit der Zahl durch blosses Verwechseln der Zifern keine Vergrösserung vorgenommen werden, man muss folglich nothwendig z gegen eine der Zifern umtauschen, die sich zu ihrer Rechten befinden. Hier darf aber nicht für z eine Zifer gesetzt werden, die ihr gleich oder gar kleiner als sie ist (22. Satz,) folglich muss man für sie eine grösere substituiren. Da man nun bei dem vorgeschriebenen Verfahren für die Zifer z die setzt, welche unter den übrigen von ihr die nächstgrösere ist und alle übrige Zifern der Zahl neben diese substituirte Zifer so geordnet schreibt dass sie die kleinste Zahl bilden, die sich mit ihnen schreiben läst (19. Satz), so ist einleuchtend, dass dadurch die Zahl nicht nur vergrösert wird, sondern dass sie auch zugleich die geringste Vergrösserung erhält, welche durch blosse Versetzung der Zifern erhalten werden kann.

25, *Satz.*

Will man eine Zahl Z durch Umtauschung der Zifern so wenig als möglich vergrösern, so schneide man von der Linken nach der Rechten Zifern ab, die eine Zahl bilden, deren erste Zifer z zwar kleiner ist als die nächstfolgende, deren übrige Zifern aber so geordnet sind, dass niemals die nächstfolgende grösser ist als die nächstvorhergehende. Diesen Theil der Zahl Z vergrösere man nach dem 24ten Satze und lasse alle übrige Zifern der Zahl Z unverändert stehn, Denn hier wird die Vergrösserung nach der Vorschrift des 23ten und 24ten Satzes zugleich vor-

vorgenommen, folglich so, dafs die Zahl den möglichst kleinsten Wachsthum erhält, den sie durch blofses Vertauschen der Zifern bekommen kann.

Aufgaben mit gegebenen Zifern entweder alle Zahlen zu schreiben, die sich damit schreiben lassen, oder nur die welche unter bestimmten Einschränkungen damit geschrieben werden können.

§. 7.

Aufgabe.

Es sollen alle Zahlen geschrieben werden, die mit den Zifern 1, 2, 3, ... p geschrieben werden können, und zwar so, dafs man von der kleinsten Zahl successiv zur gröfsten übergeht.

Auflösung.

1) Man schreibe die einzifrigen Zahlen, wie sie ihrer Gröfse nach, unter sich folgen, neben einander.

2) Als die erste zweizifrige Zahl setze man 11 hin und leite hieraus die übrigen zweizifrigen Zahlen nach dem 4ten und 6ten Satze (§. 6.) her.

3) Man setze vor die erste zweizifrige Zahl die Zifer 1 und folgere hieraus wieder nach dem 4ten und 6ten Satze die andern dreizifrigen Zahlen.

4) Nach der nämlichen Vorschrift, wie man die dreizifrigen Zahlen aus den zweizifrigen abgeleitet hat, leite man die vierzifrigen aus den dreizifrigen, die fünfzifrigen aus den vierzifrigen u. s. f. ab.

Beweis.

Bei der Beobachtung der gegebenen Regeln schreibt man zuerst die einzifrigen Zahlen so hin, dafs man von der kleinsten zur gröfsten geht und von dieser geht man dann successiv nach dem 6ten und 4ten Satze zu den andern Zahlen fort, so dafs man also immer von einer Zahl zur nächstgröfsern kömmt. Es werden also hierbei, gewifs die Zahlen so hingeschrieben, wie sie ihrer Gröfse

nach

nach auf einander folgen, auch wird keine übergangen, weil das succesive Fortschreiten von einer Zahl zur nächstgrösern dieses nicht zulässt.

Beispiele.

Es sind die Zifern 1, 2, 3, 4, gegeben

1,	2,	3,	4,
11,	12,	13,	14,
21,	22,	23,	24,
31,	32,	33,	34,
41,	42,	43,	44,
111,	112,	113,	114,
121,	122,	123,	124,
131,	132,	133,	134,
141,	142,	143,	144,
211,	212,	213,	214,
221,	222,	223,	224,
231,	232,	233,	234,
241,	242,	243,	244,
311,	312,	313,	314,
"	"	"	"
341,	342,	343,	344,
411,	412,	413,	414,
"	"	"	"
441,	442,	443,	444,
1111,	1112,	1113,	1114,
u.	f.		w.

§. 8.

Aufgabe.

Alle gut geordnete Zahlen zu schreiben, die mit den Zifern 1, 2, 3...p, geschrieben werden können, und zwar in der Ordnung, dass allemal die kleinere Zahl früher als die grösere geschrieben wird.

Auflösung.

1, Man schreibe die einzifrigen Zahlen succesiv von der kleinsten Zahl 1 bis zur grösten p neben einander.

2) Man ſetze die geringſte zweizifrige Zahl 11 hin und leite hieraus nach dem 4ten Satze ſo viele andere her als hiernach geſchehn kann. Hat man die höchſte Zahl die ſich hierdurch finden läſst, ſo mache man aus dieſer nach b) 14. Satze die nächſtfolgende und wende auf dieſe wieder die Vorſchrift des 4ten Satzes an und wenn dies nicht mehr angeht, ſo nehme man aufs neue den 14ten Satz b) zu Hülfe n. ſ. w. bifs man zu der zweizifrigen Zahl kömmt, deren beide Zifern keine Vergröſserung mehr zulaſsen.

3) Man ſchreibe vor die geringſte zweizifrige Zahl die Zifer 1 und leite hieraus wieder die übrigen ſo daſs man ſich hierzu des 4ten und 14ten Satzes b) ſo bedient, wie es zu der Ableitung der zweizifrigen Zahlen aus der geringſten vorgeſchrieben iſt.

4) Auf dieſelbe Weiſe wie die dreizifrigen aus den zweizifrigen abgeleitet werden, leitet man die vierzifrigen wieder aus den dreizifrigen, die fünfzifrigen aus den vierzifrigen ab u. ſ. w.

Beweis.

Da man zuerſt die einzifrigen Zahlen ihrer Gröſse nach neben einander ſchreibt, hierauf die geringſte zweizifrige Zahl 11 hinſetzt und aus dieſer nach dem 4ten und 14ten Satze b) alle übrige zweizifrige Zahlen herleitet und eben ſo aus der geringſten dreizifrigen Zahl 111 wieder die andern folgert und nach der nämlichen Regel die vierzifrigen, fünfzifrigen Zahlen u. ſ. f. darſtellt, ſo iſt einleuchtend, daſs die gefundenen Zahlen wachſend fortlaufen, alle gutgeordnet ſind und wegen des hiermit verbundenen Fortganges von der kleinern Zahl zur nächſtgröſsern gutgeordneten, keine übergangen werden kann. Da nun die gegebene Aufgabe dieſes verlangt, ſo thut ihr auch die Auflöſung völlig Genüge.

Bei-

Beispiel.

Es sind die Zifern 1, 2, 3, 4, 5, 6 gegeben.

1,	2,	3,	4,	5,	6,
11,	12,	13,	14,	15,	16,
	22,	23,	24,	25,	26,
		33,	34,	35,	36,
			44,	45,	46,
				55,	56,
					66,
111,	112,	113,	114,	115,	116,
	122,	123,	124,	125,	126,
		133,	134,	135,	136,
			144,	145,	146,
				155,	156,
					166,
	222,	223,	224,	225,	226,
		233,	234,	235,	236,
			244,	245,	246,
				255,	256,
					266,
		333,	334,	335,	336,
			344,	345,	346,
				355,	356,
					366,
			444,	445,	446,
				455,	456,
					466,
				555,	556,
					566,
					666,
1111,	1112,	1113,	1114,	1115,	1116,

u. f. w.

BIBLIOTEKA WOJEWÓDZKA GDAŃSKA

§. 9.

Aufgabe.

Es sollen mit 1, 2, 3 .... p, alle Zahlen, deren Ziffernsumme gleich p ist, so geschrieben werden, dafs man nach und nach von der kleinsten Zahl zur gröfsten kömmt.

Auflösung.

Man suche zuerst die einzifrigen, dann die zweizifrigen, hierauf die dreizifrigen Zahlen u. s. f. nach folgenden Regeln:

1) Man schreibe die Zahl p hin, diese ist die einzige einzifrige Zahl, welche sich hier denken läfst.

2) Aus dieser erhält man die geringste zweizifrige, indem man p um 1 vermindert und dieser um 1 verminderten Zifer, 1 vorsetzt. Hieraus bekömmt man die zweite, wenn man die letzte Zifer um 1 verkleinert und die erste um 1 vergröfsert. Auf die nämliche Weise erhält man aus der zweiten die dritte, aus der dritten die vierte u. s. w. Die zweizifrige, deren letzte Zifer 1 ist, ist die gröfste zweizifrige Zahl.

3) Um die kleinste dreizifrige Zahl zu erhalten, denke man sich die zuletzt gefundene zweizifrige als eine dreizifrige, in deren höchsten Zifernstelle o steht und leite hieraus nach des §. 6. 13ten Satze die nächstgröfsere Zahl her. Diese Zahl ist die erste dreizifrige. Aus dieser leite man alsdann die zweite, aus der zweiten die dritte u. s. f. nach den Regeln des 12ten und 13ten Satzes des §. 6. ab. Die gröfste dreizifrige Zahl endigt sich mit 2 Einsen.

4) So wie man die dreizifrigen aus den zweizifrigen Zahlen erhalten hat, bekömmt man auch die vierzifrigen aus den dreizifrigen, die fünfzifrigen aus den vierzifrigen, die sechszifrigen aus den fünfzifrigen u. s. f.

Die

Die gröfste Zahl deren Zifernſumme p iſt, iſt eine Zahl mit p Zifern, deren eine jede 1 iſt.

Beweis.

Da man hier von der einzifrigen Zahl p zu den zweizifrigen, dreizifrigen, vierzifrigen Zahlen u. ſ. w. nach den Regeln des 12ten und 13ten Satzes des §. 6. kömmt, ſo iſt einleuchtend, dafs in jeder Zahl die Summe der Zifern gleich p iſt, dafs man ferner ſucceſsiv von der kleinſten Zahl zur gröfsten übergeht und dafs aus dieſem Grunde auch keine hier denkbare Zahl übergangen wird.

Beiſpiele.

1)

6; 15, 24, 33, 42, 51; 114, 123, 132, 141, 213, 222, 231, 312, 321, 411; 1113, 1122, 1131, 1212, 1221, 1311, 2112, 2121, 2211, 3111; 11112, 11121, 11211, 12111, 21111; 111111.

2)

8; 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71; 116, 125, 134, 143, 152, 161, 215, 224, 233, 242, 251, 314, 323, 332, 341, 413, 422, 431, 512, 521, 611; 1115, 1124, 1133, 1142, 1151, 1214, 1223, 1232, 1241, 1313, 1322, 1331, 1412, 1421, 1511, 2114, 2123, 2132, 2141, 2213, 2222, 2231, 2312, 2321, 2411, 3113, 3122, 3131, 3212, 3221, 3311, 4112, 4121, 4211, 5111; 11114, 11123, 11132, 11141, 11213, 11222, 11231, 11312, 11321, 11411, 12113, 12122, 12131, 12212, 12221, 12311, 13112, 13121, 13211, 14111, 21113, 21122, 21131, 21212, 21221, 21311, 22112, 22121, 22211, 23111, 31112, 31121, 31211, 32111, 41111; 111113, 111122, 111131, 111212, 111221, 111311, 112112, 112121, 112211, 113111, 121112, 121121, 121211, 122111, 131111, 211112, 211121, 211211, 212111, 221111, 311111; 1111112, 1111121, 1111211, 1112111, 1121111, 1211111, 2111111; 11111111.

3)

4

13
22
31

112
121
211

1111

§. 10.

Aufgabe.

Mit den Zifern 1, 2, 3, ... p, alle gutgeordnete Zahlen zu ſchreiben, deren Zifernſumme gleich p iſt und zwar in der Ordnung, daſs man zuerſt die kleinſte Zahl hinſchreibt und von dieſer ſucceſsiv zu den gröſsern übergeht.

Auflöſung.

Man gehe von der einzifrigen Zahl ſucceſſiv zu den zweizifrigen, dreizifrigen, vierzifrigen Zahlen u. ſ. w. nach folgenden Vorſchriften:

1) Es wird zuerſt die Zahl p hingeſchrieben; dieſe iſt die einzige hier mögliche einzifrige Zahl.

2) Aus dieſer leitet man die erſte und geringſte zweizifrige Zahl her, indem man ſie um 1 vermindert und der hierdurch entſtandenen p — 1, die Zifer 1 vorſchreibt. Hieraus bekömmt man die nächſtfolgende, wenn man ihre zweite Zifer, alſo p — 1, um 1 verkleinert und ihre erſte Zifer, nämlich 1, um 1 vergröſsert. Auf die nämliche Weiſe bekömmt man aus der hierdurch erhaltenen zweizifrigen Zahl, die drit-

te

te zweizifrige und ſo überhaupt aus der nächſtvorhergehenden die nächſtfolgende. Kömmt man hierbei auf eine Zahl deren Zifern unter ſich gleich ſind oder bei der ſich die erſte Zifer nur um die Einheit von der letzten unterſcheidet, ſo iſt dieſe die letzte zweizifrige Zahl.

3) Um die erſte dreizifrige Zahl zu bekommen, ſchreibt man der zuletzt erhaltenen zweizifrigen, o vor und leitet aus dieſer nach dem 17ten Satze des §. 6. die nächſtgröſsere her; dieſe iſt die erſte und geringſte dreizifrige Zahl. Aus dieſer erhält man alsdenn, vermittelſt des 17ten Satzes in §. 6. ſucceſſiv alle folgende. Die dreizifrige Zahl iſt die letzte und daher gröſste, aus welcher durch den 17ten Satz des §. 6. keine gröſsere dreizifrige gemacht werden kann,

4) Aus den dreizifrigen Zahlen leitet man alsdenn auf die nämliche Weiſe die vierzifrigen, aus den vierzifrigen, die fünfzifrigen u. ſ. f. ab, wie die dreizifrigen aus den zweizifrigen abgeleitet werden.

Beweis.

Aus der einzifrigen Zahl findet man offenbar nach 2) alle gutgeordnete zweizifrige zur Zifernſumme p, denn man geht nach dieſer Vorſchrift ſucceſſiv von der kleinſten zu den gröſsern über und bleibt bei der ſtehn, aus welcher keine gutgeordnete zweizifrige Zahl weiter abgeleitet werden kann. Da nun aus dieſen nach den Regeln des 17ten Satzes in §. 6. alle dreizifrige, vierzifrige Zahlen u. ſ. w. hergeleitet werden, ſo iſt einleuchtend, daſs man durch die gegebene Auflöſung alle gutgeordnete Zahlen zur Zifernſumme p erhält, und zugleich ſucceſſiv von der kleinſten Zahl zur gröſsten kömmt, weil man von der kleinſten Zahl, nämlich von p ausgeht.

Beispiele.

1)	2)	3)
7	6	8
16	15	17
25	24	26
34	33	35
115	114	44
124	123	116
133	222	125
223	1113	134
1114	1122	224
1123	11112	233
1222	111111	1115
11113		1124
11122		1133
111112		1223
1111111		2222
		11114
		11123
		11222
		111113
		111122
		1111112
		11111111

§. 11.

Aufgabe.

Es sollen alle Zahlen successiv von der kleinsten bis zur grösten geschrieben werden, die sich mit den Zifern 1, 2, 3, 4, ... p unter der Bedingung schreiben lassen, dass eine jede Zahl, alle diese gegebene Zifern, und keine öfter als einmal enthält.

Auf-

Auflöſung.

Man ſchreibe zuerſt die Zifern gutgeordnet neben einander, dies giebt die erſte Zahl. Aus dieſer leite man nach der Vorſchrift des 25ten Satzes in §. 6. die zweite, aus dieſer zweiten, die dritte, aus der dritten die vierte her u. ſ. w. bis man auf eine Zahl kömmt, deren Zifern ſo geordnet ſind, daſs allemal die kleinere auf die gröſsere folgt. Dieſe Zahl iſt die letzte und gröſste.

Beweis.

Die erſte Zahl welche man hinſchreibt iſt die kleinſte (§. 2, 19 Satz). Da nun hieraus nach dem 25ten Satze des §. 6. ſucceſſiv die gröſsern hergeleitet werden, ſo iſt klar, daſs die Auflöſung der Aufgabe völlig entſpricht. Daſs die Zahl hier die gröſste iſt, deren Zifern umgekehrt gutgeordnet ſind folgt aus §. 6, 18. Satz.

Beiſpiel.

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Zweiter Abſchnitt.

Combinationslehre.

1) Von den Complexionen überhaupt.

§. 12.

1. *Erklärung.*

Mehrere neben einander geſtellte Dinge in irgend einer Verbindung gedacht, machen eine Complexion. Eine ſolche wäre z. B. *bcfgh*, wo man ſich unter den Buchſtaben denken mag, was man will, alſo auch Zahlen. (In der Folge kann bloſs von Buchſtaben- und Zahlencomplexionen die Rede ſeyn). Die gegebenen Dinge woraus die Complexion zuſammengeſetzt wird, heiſsen Elemente. *a*). Kommen in einer Complexion mehrere identiſche

a) Bedeuten die Elemente Zahlen, ſo muſs, bei dem Gebrauche der Complexionen in der Arithmetik, beſtimmt werden, in welcher Verbindung ihre Elemente zu nehmen ſind. Es kann z. B. ab in arithmetiſcher Verbindung, $a+b$, $a-b$, $a.b$, $a:b$, a^b, $\sqrt[a]{b}$ u. ſ. w. ſeyn.

tiſche Elemente neben einander geſtellt vor, wie z. B. in *aaaabf*, ſo iſt es oft ſehr nützlich, für die Complexion, welche dieſe Elemente für ſich bilden, ein einziges derſelben mit einer Zahl oben zur Rechten zu ſchreiben, die mit ihrer Anzahl übereinſtimmt. Auf dieſe Weiſe ſchreibt man die eben gedachte Complexion ſo: a^4bf. Die Zahl welche hier die Menge der identiſchen Elemente anzeigt, heiſst der Wiederholungsexponent. *b)*

2. *Erklärung.*

Complexionen einerlei Art ſind ſolche, die aus einer gleichen Anzahl von Elementen beſtehn und die übrigens die Relation unter einander haben, daſs in dem Falle, wenn in der einen, verſchiedene Elemente mehreremal vorkommen, in der andern auch ſo viele verſchiedene Elemente relativ eben ſo oft vorkommen müſsen, Alſo *aab* und *ccd* ſind Complexionen einerlei Art, wie auch *aabcdb* und *beegfff*, nicht aber *cbbd* und *fggg*, weil nämlich in der erſten *b* zweimal vorkömmt, aber nicht auch in der zweiten ſich ein Buchſtabe zweimal befindet, denn *f* iſt darinn einmal und *g* dreimal vorhanden.

3. *Erklärung.*

Complexionen ſind unter ſich ähnlich, wenn ſie ſich durch weiter nichts als durch ihre Ordnung von einander unterſcheiden. Z. B. *abfffg* und *afgfb*. Unähnlich ſind ſie hingegen wenn ſie nicht bloſs durch die Ordnung ihrer Elemente von einander verſchieden ſind.

b) Werden die Elemente in einer Complexion bei der ein Wiederholungsexponent vorkömmt, als Zahlen angeſehn und durch die Multiplication verbunden gedacht, ſo verwandelt ſich der Wiederholungsexponent in einen Potenzexponenten.

4. *Erklärung.*

Eine Complexion ist gutgeordnet, wenn bei Zahlen die Elemente von der Linken nach der Rechten so auf einander folgen, dafs nie eine gröfsere Zifer vor einer kleinern ist, und wenn bei Buchstaben nie ein späterer Buchstabe des Alphabets vor einem frühern steht, sondern umgekehrt wenn sich jedesmal der frühere Buchstabe vor dem spätern befindet. Es sind also 1368, *bfhm* gutgeordnete, hingegen 5273, *facb* sind schlechtgeordnete Complexionen. *a)*

5. *Erklärung.*

Den Complexionen kommen nach ihren Anfangselementen verschiedene Ordnungen zu. So ist *abfghm* eine Complexion der Ordnung *a*, der Ordnung *ab*, der Ordnung *abf* u. s. f. Hiernach kann die Ordnung einbuchstabig, zweibuchstabig, dreibuchstabig u. s. f. seyn.

6. *Erklärung.*

Wenn eine Complexion einer gewissen Bedingung nicht entspricht, so heifst sie in dieser Rücksicht eine unnütze Complexion, im entgegengesetzten Falle eine brauchbare. *b)*

7. *Erklärung.*

Die Complexionen bekommen die Namen Binionen, Ternionen, Quaternionen, Quinionen, Senionen, u. s. w. Ntionen, nachdem sie aus zwei, drei, vier, fünf, sechs und überhaupt n Elementen bestehn.

a) Die gutgeordnete Complexion ist gleichsam der Stellvertreter aller ihr ähnlichen Complexionen.

b) Sollen z. B. mit r, o, m, a, alle vierbuchstabige Complexionen geschrieben werden, die als Wörter der lateinischen Sprache einen bestimmten Sinn haben, so sind die Complexionen Roma, amor, armo, Maro, mora, oram, ramo brauchbare, die übrigen 17 vierbuchstabigen Complexionen aber, die sich aufser den geschriebenen, mit den gegebenen Buchstaben schreiben lafsen, unnütze.

ſtehn. Hiernach nennt man auch die einzelnen Buchſtaben und Zahlen, woraus die Complexionen gebildet werden, Unionen, und wenn von den Complexionen geſprochen wird, die für eine gewiſse Anzahl von Dingen ſtatt finden, ſo zählt man die Unionen mit.

8. *Erklärung.*

Die Complexionen werden zur erſten, zweiten dritten und überhaupt nten Klaſſe gerechnet, nachdem ſie Unionen, Binionen, Ternionen, Quaternionen u. ſ. w. Ntionen ſind, und heiſsen alsdenn Species der Klaſſe wozu ſie gehören. Die Unionen machen alſo die erſte, die Binionen die zweite, die Ternionen die dritte und ſo im allgemeinen die Ntionen die nte Klaſſe aus. Einer jeden Klaſſe kömmt ein Exponent zu, nämlich die Zahl iſt ihr Exponent, welche ſagt, die wievielſte Klaſſe ſie iſt. Die Klaſſen werden mit lateiniſchen groſsen Buchſtaben, nämlich die erſte mit A, die zweite mit B, die dritte mit C, und ſ. w, die nte mit N, bezeichnet. In einigen Fällen wird hierzu die gradeſtehende in andern aber die ſchiefſtehende Schrift gewählt. In der Folge wird dieſes näher beſtimmt werden. Bisweilen beſtimmt man aber auch eine Klaſſe dadurch daſs man angiebt, die wievielſte vorhergehende oder folgende ſie von einer gewiſsen beſtimmten iſt, und bezeichnet dieſs auf die Weiſe, daſs man über das gewöhnliche Zeichen der Klaſſe durch welche die andere beſtimmt werden ſoll, eine Zahl ſchreibt, die durch ihr Zeichen — oder + ſagt ob die zubezeichnende Klaſſe vorhergeht oder folgt und die durch ihre Gröſse anzeigt, die wievielſte vorhergehende oder folgende ſie iſt. So z. B. bedeuten $\overset{-3}{F}$ und C, ferner $\overset{+2}{F}$ und H einerlei. $\overset{0}{F}$ iſt mit F gleichgültig. Dieſe Zahlen heiſsen Diſtanzexponenten. *a*)

9. *Er-*

a) Die Diſtanzexponenten können nicht nur hier ſondern auch in

9. *Erklärung.*

Eine Klaſſe iſt gutgeordnet, wenn ihre Zahlencomplexionen, als Zahlen angeſehn, wachſend fortlaufen und wenn ihre Buchſtabencomplexionen, als Wörter eines Lexicons betrachtet, ſo auf einander folgen, daſs nie ein ſpäteres Wort vor einem frühern ſteht.

10. *Erklärung.*

Wenn ſich Zahlen — und Buchſtabenelemente au einander beziehn, ſo ſchreibt man, wenn dieſes angezeigt werden ſoll, entweder über oder unter die Buchſtaben die ſich darauf beziehenden Zahlen und ſchlieſst die beiden Zeilen in Klammern ein. Bezögen ſich z. B. die Zahlen 1, 2, 3, 4, u. ſ. w. in der Ordnung wie ſie genannt ſind auf a, b, c, d, u. ſ. f. ſo zeigte dies die Figur $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{a,\ b,\ c,\ d\ldots}$ oder auch $\binom{a,\ b,\ c,\ d\ldots}{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}$ an. Dieſe Figur heiſst der Zeiger und vermittelſt ſeiner iſt mann im Stande ſogleich Buchſtabencomplexionen in Zahlencomplexionen und ſo umgekehrt zu verwandeln.

2. Von den Involutionen und Evolutionen überhaupt.

§. 13.

1. *Erklärung.*

Wenn in der Arithmetik die Glieder einer Reihe nach einem bekannten Geſetze durch einander beſtimmt werden, ſo macht es keine Schwierigkeit jedes einzelne Glied anzugeben, ſobald man ſucceſſiv von dem erſten zu den folgenden fortgeht; anders verhält es ſich aber, wenn man

in andern Fällen mit Nutzen gebraucht werden, z. B. bei auf einander folgenden Werthen und Gliedern.

man aufser der Ordnung fogleich irgend ein verlangtes angeben foll. Man bedient fich hierzu eines allgemeinen Gliedes, aber um diefes zu erhalten ift es nothwendig wenigftens zuvor, blofs zur Vorbereitung, einige der erften Glieder zu entwickeln, fo dafs man alfo nicht unmittelbar mit der Conftruction des allgemeinen Gliedes anfangen kann. Ift es gefunden fo müfsen die einzelnen beftimmten Glieder aus ihm durch Subftitutionen entwickelt werden, die oft fehr mühfam und fchwierig find und häufig enthält die allgemeine Formel für das Glied das man fucht viel überflüffiges. Die Combinationslehre kennt aber ein Verfahren, das Verlangte ohne Umwege, durch eine blofse Anordnung der gegebenen Elemente zu Complexionen fo darzuftellen, dafs in dem Ausdrucke nichts überflüfsiges ift und dafs diefer zugleich auf das deutlichfte alles Vorhergehende fo vor Augen ftellt, dafs man gleich bei dem erften Blicke die Verbindung des Vorhergehenden mit dem Folgenden wahrnimmt und dafs man im Stande ift durch ein blofses Ziehn von graden, vertikalen und horizontalen Linien, das Vorhergehende von dem Folgenden abzufondern. Ein folches Verfahren wird Involution genannt, weil das dadurch Erhaltene nicht nur das Verlangte darftellt, fondern auch zugleich das involvirt enthält, was der Ordnung nach, dem Verlangten vorhergeht. Sehr häufig nennt man aber auch den durch die Involution entftandenen Ausdruck felbft, Involution. *a*)

Wird z. B. verlangt, dafs man alle gutgeordnete Zahlen angeben foll, die fich mit den Zifern 1, 2, 3, 4 fchreiben laffen, fo dafs die Zifernfumme jeder Zahl gleich 4 ift, fo ift die Darftellung

1	1	1	1, zu
1	1	2	
1	3		
2	2		
4			

der

a) Hindenburgs Archiv der reinen und angewandten Mathematik. Erfter Band, erftes Heft, pag. 13.

der man durch ein blofses Anordnen der Elemente kömmt eine Involution; denn sie giebt die gesuchten Zahlen 1111, 112, 13, 22, 4, sie hat auch nichts überflüssiges und enthält zugleich alle gutgeordnete Zahlen zu den vorhergehenden Summen, nämlich zur Summe 1 für die Zifer 1, zur Summe 2 für die Zifern 1, 2, zur Summe 3 für die Zifern 1, 2, 3 und zwar so, dafs diese durch ein blofses Ziehn von Horizontal- und Vertikallinien von einander getrennt werden können, wie man aus der Figur deutlich sieht. Dieses Absondern heifst Evolviren. Die gedachten Linien pflegt man gewöhnlich schon bei der Construction der Involution zu ziehn.

Eine andere Involution für die nämliche Aufgabe ist

4,
1|3
22
1|12
1|111

denn es fällt deutlich in die Augen, dafs in diesem Ausdrucke, aufser den gutgeordneten Zahlen zur Summe 4 noch die gutgeordneten zur Summe 3, 2 und 1 vorkommen und dafs diese sehr leicht durch ein Linienziehn zu evolviren sind, auch ist klar, dafs er nichts besitzt, das nicht nothwendig zu dem Gesuchten gehört. Allein bei dieser Involution ist die Evolution nicht so einfach wie bei der vorigen, denn es kann z. B. hier nicht wie dort die Absonderung aller gutgeordneten Zahlen zur Summe 3 auf einmal geschehn, sondern man ist hier genöthigt erst die einzifrige Zahl für sich zu evolviren, dann die zweizifrige und hierauf die dreizifrige. Der Grund hiervon liegt darinn, dafs man bei dieser Darstellung nicht vom Geringern zum Gröfsern übergeht.

Nennt man die Involution nur eine vollständige, welche alle Eigenschaften der ersten hat, so sind die Erfordernisse einer vollständigen Involution diese:

1)

1) Dafs sie alles nothwendige aber auch nichts enthält was nicht als Theil des Gesuchten anzusehn ist.

2) Dafs sie alles besitzt, was der Ordnung nach dem Gesuchten vorhergeht.

3) Dafs bei ihr der Fortgang von dem Vorhergehenden zum Folgenden so offen steht, dafs dieses nach einem bestimmten unveränderlichen Gesetze durch ein blofses Hinzufügen neuer Elemente geschehn kann.

4) Dafs sich bei ihr das der Ordnung nach Vorhergehende von dem Folgenden auf eine einfache Weise auf einmal absondern läfst.

Willkührlicher Satz.

Das Zeichen für Involution überhaupt ist: J. Es ist aber die Form dieses Buchstabens nach den verschiedenen Involutionen, verschieden. Dies wird in der Folge bestimmt werden.

1. *Anmerkung.*

Es ist Involution immer nur relativ zu verstehn, den es kann eine Darstellung in einer Hinsicht eine involutorische in einer andern aber wieder nicht seyn.

2. *Anmerkung.*

Es lassen sich auch Involutionen denken bei welchen die Theile von dem Ganzen durch Ebenen abzusondern sind. Eine solche könnte man eine körperliche und daher die, bei welcher das evolviren durch Linien geschieht, eine ebene Involution nennen. *a*).

a) Quod ipsas involutiones attinet, cum hucusque prolatae sint planae, quae in longum et latum extenduntur, mente con-

3. Von den Verſetzungen.

§. 14.

1. *Erklärung.*

Gegebene Dinge auf alle mögliche Weiſe **verſetzen**, heiſst alle unter ſich ähnliche Complexionen (§. 12, 3. Erkl.) darſtellen, deren eine jede alle gegebene Elemente enthält und auſser dieſen weiter keine beſitzt. Eine jede der dargeſtellten Complexionen wird eine **Verſetzung** genannt.

2. *Erklärung.*

Die Zahl welche ſagt, **wie viele** Verſetzungen einer gegebenen Anzahl von Dingen zukommen, heiſst die **Verſetzungszahl**.

Willkührlicher Satz.

Will man anzeigen, daſs für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4 \ldots}{a, b, c, d \ldots}$ die Verſetzungen der Buchſtaben oder Zahlenreihe gefunden werden ſollen, oder auch, daſs man ſich ſchon die Verſetzungen derſelben denkt, ſo bedient man ſich des Zeichens: $P\binom{1, 2, 3, 4 \ldots}{a, b, c, d \ldots}$, wo P, Permutatio bedeutet. Kommen mehrere der nämlichen Elemente vor, ſo bedient man ſich häufig der Wiederholungsexponenten und ſchreibt daher z. B. ſtatt $P\binom{1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3,}{a, a, a, b, b, c, c, c, c.}$ dieſes: $P\binom{1, 2, 3,}{a^3, b^2 c^4}$.

§. 15.

cipi poſſunt etiam involutiones ſolidae, ſive trium dimenſionum: ſic ut partes ad certum finem conjungendae ſitae ſint omnes in plani alicujus vel horizontalis vel verticalis vel diagonalis interſectione, ſive eae etiam ſolidum tali plano terminatum compleant. (Disquiſitiones analyticae, auctore Pfaff. Vol. I. p. 273).

§. 15.

Aufgabe.

Es ſollen alle mögliche Verſetzungen für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4, \ldots \pi}{a, b, c, d, \ldots p}$ gefunden werden.

1)

Arithmetiſch-combinatoriſche Auflöſung.

Man ſchreibe zuerſt die Complexion $1234\ldots\pi$ und leite daraus die übrigen Complexionen her, wie man nach §. 11. aus der kleinſten Zahl alle übrigen erhält. Dieſe Complexionen ſind alle Verſetzungen der gegebenen Zahlen. Setzt man hierinn für die Zahlenelemente die mit ihnen correſpondirenden Buchſtaben, ſo bekömmt man alle verlangte Buchſtabenverſetzungen.

Beweis.

Schreibt man alle mögliche Zahlen, welche nach der Aufgabe des §. 11. mit $1, 2, 3, 4\ldots\pi$ geſchrieben werden können, ſo hat man gewiſs alle verlangte Zahlencomplexionen; denn fehlte irgend eine Complexion, ſo gäbe dieſe eine Zahl, die ſich durch die Auflöſung der Aufgabe des §. 11. nicht finden lieſse, welches doch nicht der Fall ſeyn kann. Daſs man alle Buchſtabencomplexionen erhält, wenn man in den Zahlenverſetzungen für die einzelnen Elemente die damit correſpondirenden Buchſtaben ſetzt, iſt an ſich klar.

Anmerkung.

Um die Buchſtabenverſetzungen zu bekommen iſt nicht nothwendig, daſs man vorher die Zahlenverſetzungen aufſucht, denn man kann ſie als Zahlen betrachten und um ſich dieſes zu erleichtern den Buchſtaben einen

geringern oder gröſsern Werth geben, nachdem ſie im Alphabete früher oder ſpäter vorkommen.

Beiſpiel.

Die Verſetzungen von a, b, c, d, ſind:

1)	2)	3)	3)
abcd	bacd	cabd	dabc
abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbac
acdb	bcda	cbda	dbca
adbc	bdac	cdab	dcab
adcb	bdca	cdba	dcba

Anmerkung.

Die erſte Verſetzungscolumne enthält die Complexionen der Ordnung a; die zweite die der Ordnung b; die dritte die der Ordnung c; die vierte die der Ordnung d (§. 12, 5. Erkl.). Ein Beiſpiel für Zahlencomplexionen enthält §. 11.

2)

Rein combinatoriſche Auflöſung.

Es mag hier der Zeiger dieſer ſeyn; $\binom{1, 2, 3, 4}{a, b, c, d}$.

1) Man ſetze die höchſte Zifer 4 hin und ſchreibe vor dieſe die Zifer 3; hierauf tauſche man 3 gegen 4 um und ſetze die ſo erhaltene Binion unter die zuerſt gefundene. Dies giebt die Verſetzungen von 3 und 4.

2) Um die Verſetzungen von 2, 3 und 4 zu erhalten, ſetze man zuerſt jeder der beiden Binionen 2 vor, ſo hat man die Verſetzungen der Ordnung 2. Hieraus leite man die Verſetzungen der Ordnung 3 und aus dieſen wieder die der Ordnung 4 her, indem man in den Ternionen der Ordnung 2, von der erſten bis

zur

zur letzten, die Zifern 2 und 3 und in den Ternionen der Ordnung 3 eben so die Zifern 3 und 4 gegen einander umtauscht. Diese Ternionen, die man durch die Umtauschung zweier Zifern erhalten hat, schreibe man in der Ordnung wie man sie findet, unter einander, unter die letzte der Ternionen der Ordnung 2.

3) Aus diesen Versetzungen der Elemente 2, 3, 4 mache man folgendermafsen die verlangten Versetzungen der vier Elemente 1, 2, 3, 4;

Man schreibe zuerst den sämmtlichen Ternionen 1 vor, so hat man die Versetzungen der Ordnung 1. In diesen, von der ersten bis zur letzten, vertausche man 1 und 2 gegeneinander, so bekömmt man die Versetzungen der Ordnung 2. Hieraus leite man auf ähnliche Weise die Versetzungen der Ordnung 3 und aus diesen wieder die Versetzungen der Ordnung 4 her. Wegen der Stellung die diese Quaternionen unter sich haben müssen, hat man die Vorschrift zu beobachten, dafs man die erste der Ordnung 2 unter die letzte der Ordnung 1 schreiben und die übrigen, unter dieser so auf einander folgen lassen mufs, wie man sie nach der gegebenen Vorschrift findet.

Die hierhergehörige Figur ist für die Versetzungen der Elemente 1, 2, 3, 4, bis zu den Quaternionen der Ordnung 2 entwickelt, diese:

1	2	3	4
1	2	4	3
1	3	2	4
1	3	4	2
1	4	2	3
1	4	3	2
2	1	3	4

u. s. w.

Beweis.

Hat man die Verſetzungen der *m* Elemente b, c, d, e ... p, ſo findet man daraus alle die Verſetzungen der m + 1 Elemente, a, b, c, d, e ... p, welche ſich mit *a* anfangen, wenn man einer jeden jener Mtionen, *a* vorſchreibt, weil ſich hier nur ſo oft eine verſchiedene M + 1 tion der Ordnung *a* denken läſst, als ſich die m Elemente b, c, d, e ... p verſchiedentlich geordnet neben *a* denken laſſen. Vertauſcht man in dieſen, *b* und *a* gegen einander, ſo erhält man lauter M + 1 tionen der Ordnung b und dieſe ſind auch alle hier denkbare, denn es können nur ſo viele von der Ordnung b gedacht werden, als ſich die *m* Elemente a, c, d, e ... p auf verſchiedene Weiſe neben *b* ſchreiben laſſen, alſo wieder ſo viele, als *m* verſchiedene Elemente Verſetzungen geben. Eben ſo erhellet, daſs man hieraus alle M + 1 tionen der Ordnung *c* macht, wenn man in ihnen *c* gegen *b* und *b* gegen *c* umtauſcht. Setzt man nun dieſe Operation ſo lange fort bis man alle M + 1 tionen der Ordnungen a, b, c, ... p bekommen hat, ſo bekömmt man auch gewiſs alle Verſetzungen der m + 1 Dinge a, b, c, d ... p, weil dieſe nur M + 1 tionen der Ordnungen a, b, c, d ... p ſeyn können. Hat man alſo alle Verſetzungen von *m* verſchiedenen Dingen und es kömmt noch ein von jenen verſchiedenes m + 1 tes hinzu, ſo laſsen ſich auf die angegebene Weiſe aus jenen Verſetzungen leicht die Verſetzungen dieſer m + 1 Elemente angeben.

Da nun die gegebene Auflöſung dieſe Regel vorſchreibt um aus 34, 43, (den einzig möglichen beiden Verſetzungen der Elemente 3, 4), alle Permutationen der drei Elemente 2, 3, 4 und aus dieſen wieder alle Verſetzungen der vier Elemente 1, 2, 3, 4 zu erhalten, ſo leidet ihre Richtigkeit keinen Zweifel und zugleich erhellet, daſs ſich ihre Vorſchrift auf ſo viele Elemente ausdehnen läſst, als nur immer gegeben werden.

1. *Anmerkung.*

Die gegebene Auflöſung giebt für die Verſetzungen eine vollſtändige Involution, wie ſogleich der erſte Blick auf die vorige und hierunterſtehende Figur lehrt.

a	b	c	d
a	b	d	c
a	c	b	d
a	c	d	b
a	d	b	c
a	d	c	b
b	a	c	d
b	a	d	c
//	//	//	//

Denn ſie enthält nichts überflüſsiges, es laſsen ſich auch bei ihr durch bloſses Linienziehn, die Verſetzungen von einem Elemente, von zweien, dreien Elementen u. ſ. w. völlig auf einmal abſondern, auch liegt bei ihr der Fortgang von den Verſetzungen von *m* Elementen zu den Verſetzungen von m + 1 Elementen, durch ein bloſses Hinzufügen mehrerer Elemente nach einem beſtimmten unveränderlichen Geſetze, ſehr deutlich vor Augen.

2. *Anmerkung.*

Die Zahlenverſetzungen welche man durch die beiden Auflöſungen erhält, laufen wie wachſende Zahlen und die Buchſtabenverſetzungen gehn lexicographiſch fort, d. h. wenn man dieſe Buchſtabencomplexionen als Wörter eines Lexicons betrachtete, ſo würden ſie hierinn in der Ordnung auf einander folgen müſsen, wie ſie die Auflöſung gegeben hat.

3. *Anmerkung.*

Nach der erſten Auflöſung werden immer Complexionen aus Complexionen, jede nächſtfolgende aus der unmittelbar vorhergehenden abgeleitet. Bei der zweiten Auflöſung werden Ordnungen aus Ordnungen, nächſtfolgende aus unmittelbar vorhergehenden gefolgert. Für die Darſtellung der Complexionen aus Complexionen, läſst ſich leicht eine rein combinatoriſche Vorſchrift geben, wie auch §. 19. geſchehn iſt. *a*).

4. *Anmerkung.*

Die Anordnung der Complexionen nach der zweiten Auflöſung giebt eine Vertikalcolumne; es laſſen ſich aber leicht die Vorſchriften der Auflöſung dahin abändern, dafs die Complexionen eine Horizontalcolumne geben, wie man aus der hierunterſtehenden Figur deutlich ſieht.

d c	d b c b	d c d a c a	d b d a b a	c b c a b a
c d	b d b c	c d a d a c	b d a d a b	b c a c a b
b b	c c d d	a a c c d d	a a b b d d	a a b b c c
a a	a a a a	b b b b b b	c c c c c c	d d d d d d

Es werden aber bei dieſer die Complexionen von unten nach oben geleſen, wie z. B. die erſte Complexion *abcd*.

Dieſe Anmerkung bezieht ſich auch auf die vertikalen Anordnungen bei den übrigen combinatoriſchen Operationen.

5. *An-*

a) Der polynomiſche Lehrſatz, herausgegeben von Carl Friedrich Hindenburg. pag. 163. Hier iſt bei dieſer rein combinatoriſchen Auflöſung erinnert, dafs zwar bei den Verſetzungen die Regel Complexionen aus Complexionen herzuleiten rein combinatoriſch gegeben werden könne, nicht aber immer bei andern combinatoriſchen Operationen, dafs ſich aber das Ableiten der Ordnungen aus Ordnungen durchgängig rein combinatoriſch lehren laſſe.

5. *Anmerkung.*

Sowohl nach der erſten als zweiten Auflöſung erhält man die Verſetzungen der $m+1$ Elemente a, b, c, d . . . p, indem man zuerſt die Verſetzungen der Ordnung *a*, dann die der Ordnung *b*, hierauf die der Ordnung *c* findet u. ſ. w. Aus dem Beweiſe der rein combinatoriſchen Auflöſung erhellet zugleich, daſs es bei $m+1$ verſchiedenen Elementen ſo viele Verſetzungen der Ordnung *a*, der Ordnung *b*, der Ordnung *c* u. ſ. w. giebt als ſich *m* Dinge verſetzen laſſen.

§. 16.

Lehrſatz.

Die Verſetzungszahl (§. 14, 2. Erkl.) iſt für *n* verſchiedene Elemente gleich $1.2.3.4 \ldots n$.

Beweis.

Wenn man mehrere unter ſich verſchiedene Elemente verſetzt, ſo erhält man Verſetzungen von ſo vielen verſchiedenen Ordnungen, als Elemente zu verſetzen gegeben ſind, auch kömmt die eine Ordnung ſo oft vor als jede andere, weil man bei *n* Elementen ſo viele Complexionen jeder Ordnung erhält als ſich $n-1$ Elemente verſetzen laſſen (§ 15, 5. Anmerk.) Hieraus folgt: zwei Elemente geben Verſetzungen von zweien verſchiedenen Ordnungen, eine jede Ordnung kömmt einmal vor, folglich hat man bei zwei Elementen überhaupt zwei Verſetzungen. Drei Elemente geben Verſetzungen von drei verſchiedenen Ordnungen, von jeder Ordnung giebt es 2 Complexionen, folglich laſſen auch drei Elemente 3.2. Verſetzungen zu. Bei vier Elementen erhält man Verſetzungen von vier verſchiedenen Ordnungen, eine jede dieſer Ordnungen kömmt aber hier ſo oft vor als ſich drei Elemente verſetzen laſſen, folglich 3.2 mal und daher laſſen ſich vier Elemente auch $4.3.2$ mal verſetzen.

Hieraus erhellet schon hinreichend, dafs n verschiedene Elemente, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots . n$ Versetzungen geben müfsen.

Zusatz.

Es ist also die Versetzungszahl für zwei verschiedene Elemente gleich 2, für drei gleich 6, für vier gleich 24, für fünf gleich 120 u. s. w.

§. 17.

Aufgabe.

Es soll die 302te Versetzung der 6 Elemente a, b, c, d, e, f aufgesucht werden, die man finden würde, wenn man sie nach einer der beiden gegebenen Auflösungen bestimmte.

Auflösung. a).

Die gesuchte Complexion mufs zu irgend einer einbuchstabigen, zweibuchstabigen, dreibuchstabigen Ordnung u. s. w. gehören, welche für die gegebenen Elemente statt findet (§. 12. 5. Erkl.) Man untersuche daher zuerst zu welcher einbuchstabigen, dann zu welcher zweibuchstabigen, hierauf zu welcher dreibuchstabigen Ordnung sie gehört u. s. w. auf folgende Weise:

1) Da sich 5 Elemente 120mal versetzen lassen, so kömmt eine jede Ordnung der gegebenen 6 Elemente auch 120mal vor. Es ist daher

die 1te | Versetzung bis zur 120ten, von der Ordnung a
— 121te —— — — 240ten, — — —— b
— 241te —— — — 360ten, — — —— c

Es hat also die 302te gewifs die Ordnung c.

2)

a) Man mufs hierbei vor Augen haben, dafs nach den beiden Auflösungen der Aufgabe des §. 15, die Buchstabenversetzungen lexicographisch und die Zahlenversetzungen wie wachsende Zahlen fortlaufen und dafs daher auch bei jenen die Ordnungen lexicographisch und bei diesen wie wachsende Zahlen fortgehn müfsen.

2) Vier Elementen kommen 24 Verſetzungen zu, daher kömmt auch bei 6 Elementen eine jede zweibuchſtabige Ordnung 24mal vor. Unter den zweibuchſtabigen die ſich mit *c* anfangen iſt aber *ca* die erſte, folglich iſt auch die 241te Verſetzung bis zur 264ten, von der Ordnung ca
— 265te ——— — — 288ten, — — ——— cb
— 289te ——— — — 312ten, — — ——— cd
Es hat daher die 302te die Ordnung cd.

3) Drei Elemente laſſen ſich 6 mal verſetzen, folglich findet auch bei 6 Elementen jede dreibuchſtabige Ordnung 6 mal ſtat. Da nun unter den dreibuchſtabigen, die ſich mit *cd* anfangen, *cda* die erſte iſt, ſo iſt auch die 289te Verſetzung bis zur 294ten, von der Ordnung cda
— 295te ——— — — 300ten, — — ——— cdb
— 301te ——— — — 306ten, — — ——— cde
Die 302te hat alſo die Ordnung *cde*.

4) Zwei Elemente ſind nur zweier Verſetzungen fähig, daher läſst ſich auch hier jede vierbuchſtabige Ordnung nur 2mal denken, folglich da unter denen, die ſich mit *cde* anfangen, hier *cdea* die erſte iſt, ſo iſt auch die 301te Verſetzung bis zur 302ten von der Ordnung cdea.
Es hat alſo die 302te die Ordnung cdea.

5) Da bei 6 Elementen jede fünfbuchſtabige Ordnung nur einmal denkbar iſt, und unter denen, die ſich mit cdea anfangen, hier cdeab die erſte iſt, ſo iſt auch die 301te Verſetzung von der Ordnung cdeab, alſo
— 302te ——— — — ——— cdeaf und aus dieſem Grunde iſt die geſuchte 302te Verſetzung die Complexion cdeafb.

§. 13.

Aufgabe.

Es wird gefragt, die wievielſte Verſetzung der Elemente a, b, c, d, e, f die Complexion *cdeafb* iſt.

Auflösung.

Man bestimme zuerst die wievielste die erste und letzte Versetzung der Ordnung *c* ist. Hierauf untersuche man die wievielste die erste und letzte Complexion der Ordnung *cd* sey u. s. w. Jede dieser Untersuchungen führt auf zwei Zahlen, wovon die eine sagt die wievielste Complexion die gegebene wenigstens und die wievielste sie höchstens sey und diese zwei Zahlen nähern sich immer mehr und mehr desto weiter die Untersuchung fortgesetzt wird, so dass sie am Ende zusammenfallen. Folgendes wird dies erklären:

1) Es giebt hier von jeder einbuchstabigen Ordnung 120 Complexionen, folglich ist

Die 1te Versetzung bis zur 120ten, von der Ordnung a
— 121te ——— — — 240ten, — — ——— b
— 241te ——— — — 360ten, — — ——— c

Die gegebene Versetzung ist also wegen ihrer Ordnung *c*, wenigstens die 241te und höchstens die 360te.

2) Von jeder zweibuchstabigen Ordnung finden hier 24 Complexionen statt, daher ist

Die 241te Versetzung bis zur 264ten, von der Ordnung ca
— 265te ——— — — 288ten, — — ——— cb
— 289te ——— — — 312ten, — — ——— cd

Die gegebene Versetzung ist daher in Rücksicht auf ihre Ordnung *cd* wenigstens die 289te und höchstens die 312te.

3) Es lassen sich hier von jeder dreibuchstabigen Ordnung 6 Complexionen denken, folglich ist

Die 289te Versetzung bis zur 294ten, von der Ordnung cda
— 295te ——— — — 300ten, — — ——— cdb
— 301te ——— — — 306ten, — — ——— cde

Die gegebene Versetzung ist ihrer Ordnung *cde* nach, wenigstens die 301te und höchstens die 306te.

4)

4) Jede vierbuchſtabige Ordnung iſt hier 2mal denkbar, alſo iſt die 301te Verſetzung bis zur 302ten, von der Ordnung *cdea*.

Die gegebene Verſetzung iſt folglich entweder die 301te oder 302te.

5) Von jeder fünfbuchſtabigen Ordnung läſst ſich hier nur *eine* Complexion denken. Da nun die 301te die Ordnung *cdeab* haben muſs, ſo iſt einleuchtend, daſs die gegebene Verſetzung nicht die 301te ſondern die 302te iſt.

§. 19.

Aufgabe.

Es ſollen für den Zeiger $\binom{1, 1, 1, 2, 3, 3,}{a, a, a, b, c, c,}$ alle Verſetzungen angegeben werden.

1)

Arithmetiſch-combinatoriſche Auflöſung.

Man ſchreibe zuerſt die Complexion 111233, ſehe dieſe als eine Zahl an und leite aus ihr nach §. 11. alle folgende Zahlen her. Die Zahl 111233 und die folgenden ſind dann gewiſs alle mögliche Zahlenverſetzungen.

Beweis.

Dieſe Auflöſung iſt die nämliche welche als arithmetiſch-combinatoriſche für die Aufgabe des §. 15 gegeben iſt, folglich gilt auch für beide ein und derſelbe Beweis.

Die

Die Zahlenverſetzungen ſind dieſe:

111233	123113	211133	311321
111323	123131	211313	312113
111332	123311	211331	312131
112133	131123	213113	312311
112313	131132	213131	313112
112331	131213	213311	313121
113123	131231	231113	313211
113132	131312	231131	321113
113213	131321	231311	321131
113231	132113	233111	321311
113312	132131	311123	323111
113321	132311	311132	331112
121133	133112	311213	331121
121313	133121	311231	331211
121331	133211	311312	332111

Setzt man hier für die Zahlenelemente die damit correſpondirenden Buchſtaben, ſo hat man alle Buchſtabenverſetzungen der Elemente a, a, a, b, c, c.

2)

Rein combinatoriſche Auflöſung.

Man ſchreibe zuerſt die Elemente gutgeordnet neben einander. Dies giebt die erſte Verſetzung. Hierauf leite man aus dieſer und ſo überhaupt aus jeder die ihr nächſtfolgende auf dieſe Weiſe her: Man ſuche von der Rechten nach der Linken das Element auf, auf welches zuerſt, ein, dem Zeiger nach, früheres Element folgt; für dieſes frühere ſubſtituire man von denen die ſich zu ſeiner Rechten befinden, dasjenige welches ihm dem Zeiger nach zunächſt folgt und ſchreibe es ſelbſt, und die welche ihm in der Complexion rechts hin folgen, die ſubſtituirte ausgenommen, gut geordnet neben die ſubſtituirte.

Beweis.

Wenn man das Ableitungsgesetz der Auflösung umkehrt, also es so ausdrückt: man suche von der Linken nach der Rechten dasjenige Element p auf, auf welches zuerst ein früheres folgt und substituire alsdenn für das spätere Element p, von denen die sich zu seiner Rechten befinden, das jenige welches ihm im Zeiger zunächst vorhergeht und schreibe alsdenn das spätere Element selbst nebst denen, die ihm in der Complexion folgen, das substituirte ausgenommen, gutgeordnet neben dieses substituirte; so ist klar, dass man ein Gesetz hat, durch dessen fortgesetzte Anwendung aus einer jeden schlechtgeordneten Complexion eine gutgeordnete wird. Ist aber dieses der Fall, so ist auch einleuchtend, dass das directe Ableitungsgesetz der Auflösung von einer gutgeordneten Complexion nothwendig zu jeder schlechtgeordneten führen muss, welche aus der gutgeordneten durch versetzung der Elemente entstehn kann, dass man also gewiss durch die Auflösung alle gesuchte Versetzungen erhält.

Anmerkung.

Die Operation welche die rein combinatorische Auflösung vorschreibt, wird auch nach der arithmetisch-combinatorischen vorgenommen. Es entsteht also die rein combinatorische sogleich aus der arithmetischen, wenn man dieser das arithmetische Gewand nimmt. Dessen ungeachtet durfte aber doch hier der für die rein combinatorische Auflösung eigene Beweis nicht vernachlässigt werden, weil hierdurch erst ihre völlige Unabhängigkeit von der arithmetischen vor Augen gestellt wird.

§. 20.

Lehrsatz.

Die Versetzungszahl für $a^m b^n c^p d^q$ (§. 12, 1. Erkl.)

ist gleich $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cdots \cdots (m + n + p + q)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m \times 1 \cdot 2 \cdots n \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \times q}$

Be-

Beweis.

A, B, C, D, sollen Complexionen bedeuten, die keine gemeinschaftliche Elemente haben und in keiner derselben soll ein und dasselbe Element wiederhohlt vorkommen. Gesetzt nun man sieht die Elemente von A, B, C, D, insgesammt als solche an, die man versetzen will, setzt aber hierbei fest, dass in jeder Versetzung die Elemente, welche zu den einzelnen Complexionen A, B, C, D gehören, die Ordnung unter sich behalten sollen, welche sie in A, B, C, D, wie diese gegeben sind, haben, also dass in dem Falle in den Versetzungen das Element α früher als β, β eher als γ u. s. w. vorkommen muss, wenn sie als Elemente der Complexion A, in dieser, wie sie gegeben ist, in der genannten Ordnung auf einander folgen; so ist einleuchtend, dass man bei einer solchen Einschränkung nicht so viele Versetzungen erhält, als man ohne sie würde erhalten haben. Da nun diese Einschränkung eigentlich darinn besteht, dass man festsetzt, es sollen A, B, C, D, jede für sich betrachtet keine Versetzungen ihrer Elemente zulassen, so ist klar, dass man wegen A so vielmal weniger Versetzungen erhält, als die Versetzungszahl von A ausmacht; wegen B so vielmal weniger als die Versetzungszahl von B beträgt u. s. w. kurz überhaupt, dass man, wenn die Versetzungszahlen von A, B, C, D, die Zahlen π, φ, χ, ψ sind, auch $\pi . \varphi . \chi . \psi$ mal weniger Versetzungen bekömmt, als man würde bekommen haben, wenn jene Bedingung nicht gegeben wäre. Wäre also die eigentliche Versetzungszahl für die Elemente der Complexion ABCD gleich V, so würde die unter der gegebenen Einschränkung erhaltene Versetzungszahl gleich $\frac{V}{\pi . \varphi . \chi . \psi}$ seyn. Dies giebt folgende Regel: wenn mehrere einzelne Complexionen, für sich betrachtet, keine Versetzungen ihrer Elemente zulassen, so findet man die Versetzungszahl für die gesammten Elemente der gedachten Complexionen, wenn man die Versetzungszahl aufsucht, wel-

welche ihnen ihrer Anzahl nach, nach §. 16 zukömmt, diese aber nachher durch das Produkt von allen Versetzungszahlen dividirt, welche den einzelnen Complexionen in Hinsicht auf die Anzahl ihrer Elemente zukommen. Ist daher $a^m b^n c^p d^q$ gegeben, wo wirklich a^m, b^n, c^p, und d^q keine Versetzungen erlauben, so ist ihre Versetzungszahl gleich

$$\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.\ldots\ldots(m+n+p+q)}{1.2.3\ldots m \times 1.2.3\ldots n \times 1.2.3\ldots p \times 1.2.3\ldots q}$$

Zusatz.

Es ist also die Versetzungszahl

von a^m gleich 1,

von $a^{m-1}b$ gleich m,

von $a^{m-2}b^2$ gleich $\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}$,

von $a^{m-3}b^3$ gleich $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$,

von $a^{m-4}b^4$ gleich $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$,

von $a^{m-5}b^5$ gleich $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ *a) b)*

u. s. w.

§. 21.

Aufgabe.

Es soll die Complexion angegeben werden, welche die 5ote Versetzung der Elemente a, a, a, b, c, c ist.

Auflösung.

Die Auflösung dieser Aufgabe muss nothwendig im allgemeinen mit der Auflösung der Aufgabe des §. 17 über-

a) Die Exponenten in a^m, $a^{m-1}b$, $a^{m-2}b^2$ u. s. f. sind hier Wiederholungsexponenten.

b) Man vergleiche mit diesen Versetzungszahlen die Binomialcoefficienten.

übereinſtimmen, man muſs alſo auch hier, wie dort, die verlangte Verſetzung dadurch erforſchen, daſs man unterſucht wie viele Complexionen es von den einzelnen auf einander folgenden Ordnungen giebt, um auf ſolche Weiſe ſucceſſiv zu erfahren, zu welcher einbuchſtabigen, zweibuchſtabigen, dreibuchſtabigen Ordnung ſie gehört u. ſ. w.

1) Die Ordnung a iſt hier 30 mal denkbar, weil die Elemente, a, a, b, c, c, 30 Verſetzungen zulaſſen, alſo in 30 verſchiedenen Stellungen unter ſich neben dem 6ten Elemente a gedacht werden können. Die Ordnung b findet hier wegen der Elemente a, a, a, c, c, 10mal ſtatt und die Ordnung c kömmt wegen der übrigen Elemente a, a, a, b, c, 20mal vor. Es iſt alſo

die 1te Verſetzung bis zur 30ten von der Ordnung a
— 31te ——— — — 40ten — — ——— b
— 41te ——— — — 60ten — — ——— c

Es hat alſo die 50te Verſetzung die Ordnung c.

2) Die Ordnung *ca* kömmt hier wegen der Elemente a, a, b, c, 12mal vor, folglich iſt

die 41te Verſetzung bis zur 52ten von der Ordnung ca.

Es hat daher die 50te Verſetzung die Ordnung ca.

3) Die Ordnung *caa* läſst ſich hier 6mal, die darauf folgende Ordnung *cab* nur 3mal und die Ordnung *cac* ebenfalls 3mal denken, alſo iſt

die 41te Verſetzung bis zur 46ten von der Ordnung caa
— 47te ——— — — 49ten — — ——— cab
— 50te ——— — — 52ten — — ——— cac

Die 50te Verſetzung hat alſo die Ordnung cac.

4) Die erſte vierbuchſtabige Ordnung, welche ſich mit *cac* anfängt, iſt *caca*, folglich iſt auch

die 5ote Verſetzung von der Ordnung *caca*.

5) Die Ordnung *cacaa* iſt die erſte fünfbuchſtabige Ordnung, die ſich mit *caca* anfängt, es iſt daher

die 5ote Verſetzung von der Ordnung *cacaa*.

6) Da von den ſechsbuchſtabigen Ordnungen, welche ſich mit *cacaa* anfangen die Ordnung *cacaab* die einzige mögliche hier iſt, alſo alle gegebene Elemente, a, a, a, b, c, c, enthält, ſo iſt einleuchtend, daſs

die 5ote Verſetzung die Complexion *cacaab* ſeyn muſs.

§. 22.

Aufgabe.

Es ſoll beſtimmt werden, die wievielſte Verſetzung der Elemente a, a, a, b, c, c die Complexion *cacaab* iſt.

Auflöſung.

Weil die hier gegebene Aufgabe im Grunde mit der Aufgabe des §. 18 einerlei iſt, ſo gilt auch im allgemeinen für beide dieſelbe Auflöſung. Man muſs alſo hier ſucceſſiv angeben, die wievielſten Complexionen von der Ordnung c, der Ordnung *ca*, *cac*, *caca* u. ſ. f. ſind, und zwar auf folgende Weiſe:

1) Von der Ordnung *a* giebt es hier 30, von der Ordnung *b* finden 10 ſtatt und von der Ordnung *c* kommen 20 Complexionen vor. Es iſt alſo

die 1te Verſetzung bis zur 30ten von der Ordnung a
— 31te ——— — — 40ten — — ——— b
— 41te ——— — — 60ten — — ——— c

Die gegebene Complexion *cacaab* iſt alſo hiernach wenigſtens die 41te und höchſtens die 60te Verſetzung.

2) Von der zweibuchſtabigen Ordnung *ca* giebt es hier 12 Complexionen, folglich iſt

die 41te Verſetzung bis zur 52ten von der Ordnung ca.

Die gegebene Complexion iſt daher ihrer Ordnung *ca* nach wenigſtens die 41te und kann höchſtens die 52te ſeyn.

3) Von der dreibuchſtabigen Ordnung *caa* ſind 6, von der Ordnung *cab* ſind 3 und von der Ordnung *cac* ebenfalls 3 Complexionen denkbar. Es iſt folglich

die 41te Verſetzung bis zur 46ten von der Ordnung caa
— 47te ——— — — 49ten — — ——— cab
— 50te ——— — — 52ten — — ——— cac

Die gegebene Complexion iſt alſo in Rückſicht auf ihre Ordnung *cac*, wenigſtens die 50te und höchſtens die 52te Verſetzung.

4) Von der vierbuchſtabigen Ordnung *caca* laſſen ſich 2 Complexionen denken, alſo iſt

die 50te und 51te Verſetzung von der Ordnung caca.

Die gegebene Complexion iſt alſo ihrer Ordnung caca nach, entweder die 50te oder die 51te Verſetzung.

5) Die fünfbuchſtabige Ordnung *cacaa* findet nur einmal ſtatt, folglich hat auch nur die 50te Verſetzung dieſe Ordnung.

Da nun die gegebene Complexion dieſe Ordnung beſitzt, ſo iſt klar, daſs ſie die 50te Verſetzung ſeyn muſs.

---

4. Von den Combinationen.

§. 23.

1. *Erklärung.*

Das Combiniren wird eingetheilt in Combiniren überhaupt und Combiniren zu beſtimmten Summen.

2. *Erklärung.*

Combiniren überhaupt besteht darinn, dass man alle Unionen und alle mögliche gutgeordnete Binionen, Ternionen, Quaternionen, Quinionen u. s. w. darstellt, welche für gewisse gegebene Elemente statt finden. Eine jede der gedachten Unionen, Binionen, Ternionen u. s. f. heisst hier eine Combination und der Inbegriff aller Combinationen, die zu einer und derselben Klasse gehören, macht eine Combinationsklasse aus. *a*).

Das Zeichen des Combinirens überhaupt für den Zeiger $\binom{1, 2, 3\cdots}{a, b, c\cdots}$ ist: Cb. $\binom{1, 2, 3\cdots}{a, b, c\cdots}$ Spl. wo Cb, Combinatio, und Spl. simplex bedeutet.

Anmerkung.

Die schlechtgeordneten Complexionen, welche sich aus den gegebenen Elementen bilden lassen, erhält man durch Versetzung der Elemente der einzelnen Combinationen.

3. *Erklärung.*

Die Combinationen der zweiten, dritten und überhaupt der *n*ten Klasse suchen, heisst sie zu 2, 3, 4 und

a) Die gegebene Erklärung bestimmt eigentlich ein Combiniren überhaupt im engern Sinne, denn wenn man von Combiniren überhaupt im allgemeinen spricht, so ist es nicht nöthig grade diese gutgeordneten Complexionen anzugeben, sondern es ist hinreichend, wenn die gefundenen Complexionen alle unter sich ähnlich sind und sich die, welche ausser diesen noch aus den gegebenen Elementen gemacht werden können, durch eine blosse Versetzung aus ihnen herleiten lassen. (Einleitung §. 1. pag. 2). Es erleichtert aber das Combiniren ungemein, wenn man die Combinationen allemal gutgeordnet macht, dies ist der Grund weswegen man unter Combinationen nur gutgeordnete Complexionen versteht.

im allgemeinen zu *n* verbinden. Die Zahl zu welcher combinirt werden soll, wird der Exponent der Combination genannt.

4. *Erklärung.*

Verfährt man bei dem Combiniren als wäre ein jedes der gegebenen Elemente mehreremal und zwar wenn weiter nichts darüber bestimmt wird, unendlichemal gegeben, so combinirt man mit Wiederholungen.

Das Zeichen hierfür ist für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4\cdots}{a, b, c, d\ldots}$ dieses: Cb. $\binom{1, 2, 3, 4\cdots}{a, b, c, d\ldots}$ Spl. a. r. wo a. r, *admissis repetitionibus* bedeutet.

Darf aber bei dem Combiniren ein jedes Element nicht öfter als gegeben gedacht werden, als es wirklich gegeben ist, so combinirt man ohne Wiederholungen.

Das hierhergehörige Zeichen ist für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4\cdots}{a, b, c, d\ldots}$ dieses: Cb. $\binom{1, 2, 3, 4\cdots}{a, b, c, d\ldots}$ Spl. o. r.

Nämlich o. r bedeutet hier *omissis repetitionibus.*

5. *Erklärung.*

Das Combiniren zu einer bestimmten Summe besteht darinn, dass man für einen gewissen Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4\cdots}{a, b, c, d\ldots}$ nicht alle Combinationen sondern nur die sucht, deren Elementensumme eine gegebene Zahl z. B. 6 ist.

Die Zeichen hierfür sind:

Cb. $\binom{1, 2, 3\cdots}{a, b, c\ldots}$ num. n, a. r und Cb. $\binom{1, 2, 3\cdots}{a, b, c\ldots}$ num. n, o. r

wo *n* die gegebene Zahl bedeutet und a. r und o. r die vorhin angegebene Bedeutung haben.

6. *Erklärung.*

Die einzelnen Combinations-complexionen zur Summe *n*, heissen Combinations-zerfällungen der Zahl *n*.

Will-

Willkührlicher Satz.

Die Combinationsklaſſen, die erſte, zweite, dritte, vierte u. ſ. w. werden mit groſsen grade. ſtehenden lateiniſchen Buchſtaben A, B, C, D u. ſ. w. bezeichnet. Um eine unbeſtimmte Klaſſe z. B. die *n*te anzudeuten, bedient man ſich ebenfalls eines groſsen lateiniſchen gradeſtehenden Buchſtabens, aber aus einem Alphabethe deſsen Buchſtaben wie geſchriebene ausſehn z. B. für die *n*te Klaſſe nimmt man den Buchſtaben $\mathfrak{N}$, ſo daſs alſo N und $\mathfrak{N}$ verſchiedenes bedeuten. Wird von Combinationen mit Wiederholungen geſprochen, ſo hängt man dem Klaſſenzeichen oben zur Linken einen Strich an, als $'A, 'B, 'C, 'D$ u. ſ. w. Bei Combinationen ohne Wiederholungen wird oben zur Rechten ein Strich geſetzt, als A', B', C', D' u. ſ. w. Für die Combinationen zur Summe *n* hat man die Zeichen ${}^nA, {}^nB$, u. ſ. f. und ${}^nA', {}^nB'$, u. ſ. w., jene für die mit Wiederholungen und dieſe für die ohne Wiederholungen. Das Zeichen für die Combinationsinvolutionen überhaupt iſt der gradeſtehende Buchſtabe J. Bei Combinationen überhaupt mit Wiederholungen hängt man dieſem oben zur Linken und bei Combinationen ohne Wiederholungen oben zur Rechten einen Strich an, ſo daſs man die beiden Zeichen $'J$ und J' hat. Die Zeichen für die Combinationsinvolutionen zur Summe *n* ſind ${}^nJ, {}^n\mathfrak{J}$ und ${}^nJ', {}^n\mathfrak{J}'$.

7. *Erklärung.*

Zum Combiniren wird entweder nur eine Elementenreihe, als a, b, c, d..., oder es werden mehrere dergleichen aber unter ſich verſchiedene gegeben.

Anmerkung.

Das bis jetzt von Combinationen geſagte bezieht ſich auf das Combiniren einer Elementenreihe insbeſondere

auch wird dieſes zuerſt abgehandelt. Das andere wird unter der Ueberſchrift, von dem Combiniren mehrerer Reihen, zuletzt vorgetragen.

α) Von dem Combiniren überhaupt mit Wiederholungen.

§. 24.

Aufgabe.

Es werden für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4, 5\ldots}{a, b, c, d, e\ldots}$ die Wiederholungs-combinationen verlangt.

1)

Arithmetiſch-combinatoriſche Auflöſung.

1) Man ſchreibe zuerſt die Unionen 1, 2, 3, 4... wie ſie, dem Zeiger nach, unter ſich folgen, neben einander. Dieſe machen die erſte Klaſſe. (A).

2) Aus der erſten Klaſſe (A), leite man die zweite (B), aus dieſer die dritte Klaſſe (C) u. ſ. w. her, wie in §. 8. aus den einzifrigen Zahlen die zweizifrigen, aus den zweizifrigen die dreizifrigen abgeleitet werden u. ſ. w. und ſetze die zweite Klaſſe unter die erſte, die dritte unter die zweite u. ſ. f.

Subſtituirt man in den Klaſſen A, B, C, D für die Zahlen die ihnen zugehörigen Buchſtaben, ſo erhält man alle Buchſtabencombinationen der Elemente a, b, c, d u. ſ. w.

Beweis.

Es muſs hier bewieſen werden, daſs man durch das vorgeſchriebene Verfahren nur gutgeordnete Complexionen und zugleich alle erhält, welche ſich mit den Elementen 1, 2, 3, 4, 5 u. ſ. f. und a, b, c, d, e u. ſ. w. ſchreiben laſſen. Daſs bei den Zahlencomplexionen beides durch die gegebnen Auflöſung erreicht wird, erhellet ſo: Es kann keine der gefundenen Complexio-

plexionen ſchlechtgeordnet ſeyn, weil ſie als Zahlen betrachtet, gutgeordnete Zahlen ſind (§. 8.) und es kann keine fehlen, weil ſonſt nicht nach §. 8. alle gutgeordnete Zahlen gefunden würden, die ſich mit 1, 2, 3, 4, 5... ſchreiben laſſen. Für die Buchſtabencomplexionen erhellet die Richtigkeit daraus, daſs nach dem gegebenen Zeiger allemal ein ſpäterer Buchſtabe des Alphabeths mit einer ſpätern Zifer des Syſtems correſpondirt und daſs ſich keine gutgeordnete Buchſtabencomplexion denken läſst, der nicht eine gutgeordnete Zahlencomplexion zugehörte.

Beiſpiele.

(1, 2, 3, 4, 5,
a, b, c, d, e)

'A	a	b	c	d	e
'B	aa	ab	ac	ad	ae
		bb	bc	bd	be
			cc	cd	ce
				dd	de
					ee
	aaa	aab	aac	aad	aae
		abb	abc	abd	abe
			acc	acd	ace
				add	ade
					aee
'C		bbb	bbc	bbd	bbe
			bcc	bcd	bce
				bdd	bde
					bee
			ccc	ccd	cce
				cdd	cde
					cee
				ddd	dde
					dee
					eee
'D	aaaa	aaab	aaac	aaad	aaae
		aabb	aabc	aabd	aabe
			aacc	aacd	aace
				aadd	aade
					aaee
		abbb	abbc	abbd	abbe
			abcc	abcd	abce
				abdd	abde

u. ſ. w.

'A	1	2	3	4	5
'B	11	12	13	14	15
		22	23	24	25
			33	34	35
				44	45
					55
	111	112	113	114	115
		122	123	124	125
			133	134	135
				144	145
					155
'C		222	223	224	225
			233	234	235
				244	245
					255
			333	334	335
				344	345
					355
				444	445
					455
					555
'D	1111	1112	1113	1114	1115
		1122	1123	1124	1125
			1133	1134	1135
				1144	1145
					1155
		1222	1223	1224	1225
			1233	1234	1235
				1244	1245

u. ſ. w.

2)

α) *Rein combinatoriſche Auflöſung.*

1) Die gegebenen Elemente a, b, c, d, ... ſchreibe man in eine Horizontalreihe, wie ſie im Alphabethe auf einander folgen, dieſe machen die erſte Claſſe aus.

2) Man ſetze allen Unionen den Buchſtaben a vor, ſo hat man die Binionen der Ordnung a. Hierauf ſchreibe man vor die Union b und alle folgende das Element b, dies giebt die Binionen der Ordnung b. Dann ſetze man vor die Union c und alle folgende das Element c, ſo erhält man die Binionen der Ordnung c. Dieſes Verfahren ſetze man ſo lange fort bis man der vorletzten und letzten Union das vorletzte Element und endlich der letzten Union das letzte Element vorgeſchrieben hat. Dieſe gefundenen Binionen geben die zweite Klaſſe.

3) Allen Binionen der zweiten Klaſſe ſchreibe man a vor, darauf ſetze man vor alle Binionen der Ordnung b und alle folgende das Element b, dann ſchreibe man den Binionen der Ordnung c und den folgenden das Element c vor u. ſ. w. bis man den Binionen der Ordnung des vorletzten und letzten Elements das vorletzte Element und den Binionen der Ordnung des letzten Elements, dieſes letzte Element vorgeſetzt hat. Die hierdurch erhaltenen Ternionen machen die dritte Klaſſe.

4) Auf die nämliche Weiſe, wie die dritte Klaſſe aus der zweiten gefunden wird, leite man die vierte aus der dritten, die fünfte aus der vierten und ſo überhaupt die nte Klaſſe aus der n— 1ten ab.

Die einzelnen Klaſſen werden in der Ordnung unter einander geſetzt wie bei der erſten Auflöſung angegeben iſt.

Beweis.

Die Complexionen ſind gutgeordnet, weil bei ihrer Entwickelung nie ein ſpäterer Buchſtabe des Alphabets vor einen frühern geſchrieben wird. Es kann auch keine fehlen, weil die Anname, daſs eine übergangen wird, auf einen Satz führt, deſſen Unrichtigkeit gleich in die Augen fällt. Denn geſetzt es fehlte aaa... bb.. cc...yx, ſo müſste man durch die gegebene Auflöſung auch nicht bb.. cc.. yx und deswegen auch nicht cc... yx und ſo auch nicht yx erhalten, da doch dieſes der zweiten Vorſchrift zuwider iſt.

Hiehergehörige Beiſpiele ſind die vorhingegebenen.

1. *Anmerkung.*

Die Darſtellung welche die jetzt gegebene Auflöſung giebt iſt eine Involution, nämlich in ſofern als ſie nicht nur die Combinationen der *m* Elemente a, b, c,...p, q, r, s, ſondern auch der m—1 Elemente a, b, c,...p, q, r, der m—2 Elemente a, b, c, ... p, q u. ſ. f. ſo enthält, daſs in den Combinationsklaſſen für eine gröſsere Anzahl von Elementen, die für eine jede geringere Anzahl auf die Weiſe involvirt ſind, daſs ſich die Klaſſen für die geringere Anzahl von Elementen ſehr leicht durch ein Linienziehn ſämmtlich auf einmal evolviren laſſen. Die folgende Figur zeigt dies deutlich:

	1	2	3	
A	a	b	c	d
B	aa	ab	ac	ad
		bb	bc	bd
			cc	cd
				dd
C	aaa	aab	aac	aad
		abb	abc	abd
			acc	acd
				add
		bbb	bbc	bbd
			bcc	bcd
				bdd
			ccc	ccd
				cdd
				ddd
D	aaaa	aaab	aaac	aaad
		aabb	aabc	aabd
			aacc	aacd
				aadd
	1	2	3	
	u.	f.	w.	

Es geschieht hier das Evolviren durch ein blofses Ziehn grader und zwar vertikaler Linien, denn wenn man die Figur von der Linken nach der Rechten betrachtet, so schneidet die Linie 11 die Combinationsklassen des Elements *a* ab, die Linie 22 trennt die Combinationsklassen der Elemente *a* und *b* u. s. f.

Prüft man diese Involution so wird man finden, dafs sie alle Erfordernisse einer vollständigen Involution hat, (§. 13.) also dafs sie wirklich eine ganz vollständige Involution ist. Denn dafs sie die erste, zweite und vierte Erfordernifs besitzt, fällt gleich in die Augen und dafs ihr auch die dritte nicht fehlt lehrt eine genauere Betrachtung ebenfalls. Man mufs sich nur in Rücksicht auf diese dritte, die beiden horizontalen Linien zwischen welchen sich eine jede einzelne Klasse befindet, weit genug aus einander gesetzt denken, um für die Fortsetzung dieser Klassen auf mehrere Elemente, Raum genug zu haben.

2. *Anmerkung.*

Dieſe Darſtellung welche eine Involution für die Anzahl der Elemente iſt, iſt nicht auch eine Involution in Rückſicht auf die auf einander folgenden Klaſſen, denn ſollte ſie eine ſolche Involution ſeyn, ſo müſste das Ganze nur eine Klaſſe bilden und in dieſer müſsten dann die vorhergehenden ſich ſo befinden, daſs ſie durch grade Linien leicht zu evolviren wären *a*). Eine ſolche Involution giebt die nächſtfolgende Auflöſung.

3)

β) *Rein combinatoriſche Auflöſung.*

1) Man ſetze zuerſt die gegebenen Elemente a, b, c, d... der Ordnung gemäſs wie ſie im Zeiger ſtehn, untereinander. Dies giebt die erſte Klaſſe.

2) Man ſetze allen Unionen den Buchſtaben a vor, ſo hat man die Binionen der Ordnung *a*. Aus dieſen, von der an die zwei verſchiedene Anfangselemente hat, mache man die Binionen der Ordnung *b* indem man das erſte Element in das nächſtfolgende des Zeigers verwandelt. Auf die nämliche Weiſe leite man aus den Binionen der Ordnung *b*, die der Ordnung *c*, aus dieſen wieder die der Ordnung *d* ab u. ſ. w. ſo erhält man die zweite Klaſſe.

3) So wie die zweite Klaſſe aus der erſten abgeleitet iſt, leite man auch die dritte aus der zweiten, die vierte aus der dritten und ſo überhaupt die n—1te aus der n—2ten und die *n*te aus der n—1ten ab.

Beweis.

Dieſe zweite rein combinatoriſche Auflöſung unterſcheidet ſich von der erſten blos durch die Form ihrer Dar-

a) Dieſe Anmerkung giebt ein Beiſpiel für die erſte des §. 13.

Darſtellung, folglich gilt für ſie auch der Beweis, der für die erſte Auflöſung gegeben iſt.

Beiſpiele.

$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ a, & b, & c \end{pmatrix}$

	a a a a a a			1 1 1 1 1 1	
	a a a a a b			1 1 1 1 1 2	
	a a a a a c	A		1 1 1 1 1 3	A
	a a a a b b			1 1 1 1 2 2	
	a a a a b c			1 1 1 1 2 3	
u.	a a a a c c	B	u.	1 1 1 1 3 3	B
	a a a b b b			1 1 1 2 2 2	
	a a a b b c			1 1 1 2 2 3	
	a a a b c c			1 1 1 2 3 3	
	a a a c c c	C		1 1 1 3 3 3	C
	a a b b b b			1 1 2 2 2 2	
	a a b b b c			1 1 2 2 2 3	
ſ.	a a b b c c		ſ.	1 1 2 2 3 3	
	a a b c c c			1 1 2 3 3 3	
	a a c c c c	D		1 1 3 3 3 3	D
	a b b b b b			1 2 2 2 2 2	
	a b b b b c			1 2 2 2 2 3	
	a b b b c c			1 2 2 2 3 3	
	a b b b c c			1 2 2 3 3 3	
	a b c c c c		w.	1 2 3 3 3 3	
w.	a c c c c c	E		1 3 3 3 3 3	E
	b b b b b b			2 2 2 2 2 2	
	b b b b b c			2 2 2 2 2 3	
	b b b b c c			2 2 2 2 3 3	
	b b b c c c			2 2 2 3 3 3	
	u. ſ. w.			u. ſ. w.	

Anmerkung.

Bei der erſten rein combinatoriſchen Auflöſung leitet man immer eine Klaſſe aus der andern her, indem man jede Complexion der folgenden aus einer Complexion der nächſtvorhergehenden macht und ſo jede Klaſſe ganz für ſich ſchreibt und die Darſtellung die man dadurch erhält iſt eine vollſtändige Involution in Rückſicht auf die Anzahl der Elemente.

Bei

Bei der zweiten rein combinatorischen Auflösung hingegen, hat man bei der Ableitung einer Klasse aus der vorhergehenden nicht beständig sein Auge auf die einzelnen Complexionen der vorhergehenden Klasse gerichtet, sondern nur bei der Construction der Complexionen der Ordnung a, die man dadurch findet, dass man den sämmtlichen Complexionen der vorhergehenden Klasse a vorschreibt: denn sobald man diese gefunden hat, leitet man aus ihnen, von einer bestimmten an, die Complexionen der Ordnung b durch eine blosse Umtauschung des ersten Elements in das nächstfolgende des Zeigers her und auf die nämliche Weise folgert man hieraus wieder die der Ordnung c u. s. w. Wenn man also die Complexionen der ersten Ordnung einer gewissen Klasse hat, so macht man es blos zu seinem Geschäfte immer Ordnungen aus Ordnungen, nächstfolgende aus der unmittelbar vorhergehenden abzuleiten. Die Darstellung welche dieses Verfahren giebt ist eine vollständige Involution in Rücksicht auf die auf einander folgenden Klassen.

Aus dieser Vergleichung der beiden rein combinatorischen Auflösungen werden die wesentlichen Merkmale wodurch sie sich von einander unterscheiden hinreichend in die Augen fallen.

1. *Zusatz.*

Es folgt aus beiden rein combinatorischen Auflösungen, diese Gleichung:

$$'J = 'A + 'B + 'C + 'D + 'E + F + \cdots + 'N.$$
$$\binom{a, b, c, d \ldots}{1, 2, 3, 4 \ldots}$$

Bezeichnet man die vierte Klasse mit $\overset{0}{D}$ und diesem gemäss (§. 12, 3. Erkl.) die dritte mit $\overset{-1}{D}$, die zweite mit $\overset{-2}{D}$, die erste mit $\overset{-3}{D}$, so erhält man, wenn die Involution bis zur vierten Klasse entwickelt gedacht wird, die

Glei-

Gleichung $'J = \overline{-3}D + \overline{-2}D + \overline{-1}D + \overline{-0}D$. Im allgemeinen kann man daher setzen $'J = \overset{+(n-1)}{'\mathfrak{N}} + \overset{+(n-2)}{'\mathfrak{N}} + \ldots + \overset{+1}{'\mathfrak{N}} + \overset{-\pi}{'\mathfrak{N}} + \overset{-2}{'\mathfrak{N}} + \overset{-1}{'\mathfrak{N}} + \overset{-0}{'\mathfrak{N}}$.

2. *Zusatz.*

Bedient man sich bei der zweiten rein combinatorischen Auflösung in Rücksicht auf das Element a der Wiederholungsexponenten (§. 12. 1te Erkl.) so erhält man für den Zeiger $\binom{1\ 2\ 3}{a\ b\ c}$, wenn man die Involution bis zur vierten Klasse entwickelt, diese Relation:

a a a a a	a^5	a^5 |
a a a a b	a^4 b	a^4 | $'A$
a a a a c	a^4 c	
a a a b b	a^3 bb	a^3 | $'B$
a a a b c	a^3 bc	
a a a c c	a^3 cc	
a a b b b	a^2 bbb	a^2 | $'C$
a a b b c	a^2 bbc	
a a b c c	a^2 bcc	
a a c c c	a^2 ccc	
a b b b b	a^1 bbbb	a^1 | $'D$
a b b b c	a^1 bbbc	
a b b c c	a^1 bbcc	
a b c c c	a^1 bccc	
a c c c c	a^1 cccc	
b b b b b	a^0 bbbbb	a^0 | $'E$
b b b b c	a^0 bbbbc	
b b b c c	a^0 bbbcc	
b b c c c	a^0 bbccc	
b c c c c	a^0 bcccc	
c c c c c	a^0 ccccc	$\binom{2,3}{b,c}$

Diese giebt die Gleichung

$$'J = a^5 + a^4\,'A + a^3\,'B + a^2\,'C + a^1\,'D + a^0\,'E.$$

$\binom{1,2,3}{a,b,c}$ $\binom{2,3}{b,c}$

welche sich allgemein so ausdrücken läßt:

$'J =$

$$'J = a^n + a^{n-1}\,'A + a^{n-2}\,'B + \ldots + a^0\,'\mathfrak{N}.$$
$$\binom{1, 2, 3, 4 \cdots}{a, b, c, d \ldots} \qquad \binom{2, 3, 4, 5 \cdots}{b, c, d, e \ldots}$$

Der Zeiger unter $'J$ bezieht sich auf die ganze Involution, hingegen der andere, nur auf die Klassen $'A$, $'B$, $'C$, u. s. w.

Da die zweite rein-combinatorische Auflösung allemal eine Klasse darstellt welche alle vorhergehende involvirt enthält, so läßt sich ihre Darstellung im allgemeinen durch $'J\,'\mathfrak{N}$ (Involution der nten Klasse) bezeichnen und hiernach erhält man aus der zuletzt gegebenen Gleichung folgende:

$$'J'\mathfrak{N} = a^n + {}^{n-1}\,'A + a^{n-2}\,'B + \ldots + a^0\,'\mathfrak{N}.$$
$$\binom{1, 2, 3, 4 \cdots}{a, b, c, d \ldots} \qquad \binom{2, 3, 4, 5 \cdots}{b, c, d, e \ldots}$$

Diese Gleichung lehrt alle Klassen für den Zeiger $\binom{2, 3, 4, \cdots}{b, c, d, \ldots}$, nach einem bestimmten Gesetze, welches sie deutlich vor Augen legt, in eine einzige Klasse für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4, \cdots}{a, b, c, d, \ldots}$ zu vereinigen. Wie hierbei die Klassen $'A, 'B, 'C,$ u. s. w. und deren Complexionen $\binom{2, 3, 4, \cdots}{b, c, d, \ldots}$ zu ordnen sind, zeigt eine Betrachtung der drei vorhin aufgestellten Figuren hinreichend.

Anmerkung.

Dies giebt eine Abkürzung der zweiten rein combinatorischen Auflösung wenn durch sie eine bestimmte Klasse für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4 \cdots}{a, b, c, d \ldots}$ angegeben werden soll.

3. Zusatz.

Substituirt man in der letzten Gleichung des zweiten Zusatzes für jedes Buchstabenelement das nachfolgende des Zeigers, so erhält man

$$1)\ 'J'\mathfrak{N} = b^n + b^{n-1\prime}A + b^{n-2\prime}B + \ldots + b^{0\prime}\mathfrak{N}$$

$$\begin{pmatrix} 2, 3, 4, 5, \ldots \\ b, c, d, e, \ldots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3, 4, 5, 6 \ldots \\ c, d, e, f \ldots \end{pmatrix}$$

Hieraus bekömmt man wieder auf die nämliche Weise die Gleichung

$$2)\ 'J'\mathfrak{N} = c^n + c^{n-1\prime}A + c^{n-2\prime}B + \ldots + c^{0\prime}\mathfrak{N}.$$

$$\begin{pmatrix} 3, 4, 5, 6 \ldots \\ c, d, e, f \ldots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4, 5, 6, 7 \ldots \\ d, e, f, g \ldots \end{pmatrix}$$

u. f. w.

Sagt man daher von einem Zeiger, dessen *m*tes Buchstabenelement allemal das *m*—1te eines andern Zeigers ist, dass er diesem Zeiger zunächst vorhergeht, so lässt sich der Satz, welchen der zweite Zusatz lehrt, allgemein so ausdrücken: Wenn die erste, zweite, dritte, vierte u. s. w. bis zur *n*ten Klasse für einen gewissen Zeiger gegeben sind, so kann man aus diesen sämmtlich eine einzige Klasse nämlich die *n*te des nächstvorhergehenden Zeigers machen und zwar nach einer und derselben Regel und umgekehrt, wenn die *n*te Klasse für irgend einen Zeiger gegeben ist, so lässt sich diese in eine Reihe von Klassen, nämlich in die erste bis zur *n*ten des nächstfolgenden Zeigers verwandeln.

4. Zusatz.

Es lässt sich aber auch zeigen, dass man im Stande ist eine Reihe von Klassen für einen gewissen Zeiger auf eine einzige Klasse irgend eines vorhergehenden Zeigers zu reduciren und so umgekehrt. Am leichtesten lässt sich

sich dieſes durch eine Gleichung darthun, es ſoll daher eine Gleichung zwiſchen der nten Klaſſe für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4\cdots}{a, b, c, d\ldots}$ und den erſten n Klaſſen für den Zeiger $\binom{4, 5, 6, 7\ldots}{d, e, f, g\ldots}$ entwickelt werden.

Die erſte Gleichung des 3ten Zuſatzes giebt:

$$'J'A, = b^1 + b^0\,'A = 'A$$

$\binom{2, 3, 4\cdots}{b, c, d,\ldots}$ $\binom{3, 4, 5\cdots}{c, d, e\ldots}$ $\binom{2, 3, 4\cdots}{b, c, d\ldots}$

$$'J'B = b^2 + b^1\,'A + b^0\,'B = 'B$$

$\binom{2, 3, 4\cdots}{b, c, d\ldots}$ $\binom{3, 4, 5\cdots}{c, d, e\ldots}$ $\binom{2, 3, 4\cdots}{b, c, d\ldots}$

$$'J'C = b^3 + b^2\,'A + b^1 B + b^0\,'C = 'C.$$

$\binom{2, 3, 4\cdots}{b, c, d\ldots}$ $\binom{3, 4, 5\cdots}{c, d, e\ldots}$ $\binom{2, 3, 4\cdots}{b, c, d\ldots}$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Setzt man dieſe Werthe der Klaſſen $'A, 'B, 'C,$ für $\binom{2, 3, 4\cdots}{b, c, d\ldots}$

die nämlichen Klaſſen in die letzte Gleichung des zweiten Zuſatzes, ſo erhält man

$$*'J'\mathfrak{N} =$$

$\binom{1, 2, 3\cdots}{a, b, c\ldots}$

$$a^n + a^{n-1}\{b^1 + b^0\,'A + a^{n-2}\{b^2 + b^1\,'A + b^0\,'B + a^{n-3}\{b^3 + b^2\,'A + b^1\,'B + b^0\,'C + \cdots$$

$\binom{3, 4, 5\cdots}{c, d, e\ldots}$

Die zweite Gleichung des 3ten Zusatzes giebt

$$'J'A = c^1 + c^0\,'A = 'A$$
$$\binom{3,4,5\cdots}{c,d,e\ldots}\quad\binom{4,5,6}{d,e,f}\quad\binom{3,4,5\cdots}{c,d,e\ldots}$$

$$'J'B = c^2 + c^1\,'A + c^0\,'B = 'B$$
$$\binom{3,4,5\cdots}{c,d,e\ldots}\quad\binom{4,5,6\cdots}{d,e,f,\ldots}\quad\binom{3,4,5\cdots}{c,d,e\ldots}$$

$$'J'C = c^3 + c^2\,'A + c^1\,'B + c^0\,'C = 'C$$
$$\binom{3,4,5\cdots}{c,d,e\ldots}\quad\binom{4,5,6,\ldots}{d,e,f,\ldots}\quad\binom{3,4,5\cdots}{c,d,e\ldots}$$

Werden in die Gleichung *, für $'A, 'B, 'C,$ $\binom{3,4,5\cdots}{c,d,e\ldots}$ die dafür jetzt entwickelten Werthe gesetzt, so bekömmt man:

$$'J'\mathfrak{N} = a^n + a^{n-1}\left\{\begin{matrix} b^1 \\ +b^0\left\{\begin{matrix} c^1 \\ +c^0\,'A \end{matrix}\right. \end{matrix}\right. + a^{n-2}\left\{\begin{matrix} b^2 \\ +b^1\left\{\begin{matrix} c^1 \\ +c^0\,'A \end{matrix}\right. \\ +b^0\left\{\begin{matrix} c^2 \\ +c^1\,'A \\ +c^0\,'B \end{matrix}\right. \end{matrix}\right.$$
$$\binom{1,2,3\cdots}{a,b,c\ldots}$$

$$+ a^{n-3}\left\{\begin{matrix} b^3 \\ +b^2\left\{\begin{matrix} c^1 \\ +c^0\,'A \end{matrix}\right. \\ +b^1\left\{\begin{matrix} c^2 \\ +c^1\,'A \\ +c^0\,'B \end{matrix}\right. \\ +b^0\left\{\begin{matrix} c^3 \\ +c^2\,'A \\ +c^1\,'B \\ +c^0\,'C \end{matrix}\right. \end{matrix}\right. + \ldots,$$
$$\binom{4,5,6,7\ldots}{d,e,f,g\ldots}$$

dieſe

Diese Gleichung ist die Gesuchte; sie ist zwar nur bis auf das vierte Glied entwickelt, es liegt doch aber schon das allgemeine Gesetz nach welchen die Glieder weiter fortlaufen hinreichend vor Augen. Das $m+1$te Glied, wenn man es nach diesem Gesetze in horizontalen Reihen darstellt, ist folgendes:

$$a^{n-m}(b^m + b^{m-1}(c^1 + c^0{}'A) + b^{m-2}(c^2 + c^1{}'A + c^0{}'B) + b^{m-3}(c^3 + c^2{}'A + c^1{}'B + c^0{}'C) + \ldots + b^0(c^m + c^{m-1}{}'A + c^{m-2}{}'B + \ldots + c^0{}'\mathfrak{M})).$$

5. *Zusatz.*

Das Verhältniss in welcher eine Klasse eines gewissen Zeigers mit der nächstvorhergehenden des nämlichen Zeigers steht, und daher auch die Entstehung einer Klasse aus der nächstvorhergehenden kann durch eine Gleichung ausgedrückt werden.

1) Die erste rein combinatorische Auflösung leitet die $n$te Klasse des Zeigers $\binom{1, 2, 3, 4\ldots}{a, b, c, d\ldots}$ aus der n—1ten ebendesselben Zeigers auf diese Weise her: es wird zuerst den sämmtlichen Complexionen der n—1ten Klasse das Element a vorgeschrieben, hierauf wird den Complexionen, welche sich mit b anfangen und den folgenden das Element b, ferner denen die c zum Anfangselemente haben und den folgenden das Element c vorgesetzt u. s. w. (§. 24.).

2) Es ist der Inbegriff aller N—1tionen des Zeigers $\binom{1, 2, 3, 4\ldots}{a, b, c, d\ldots}$ gleich $\mathfrak{N}$; für eben denselben Zeiger ist der Inbegriff der N—1tionen, von der ersten an, die sich mit b anfängt gleich $'\mathfrak{N}$; eben so machen die

$\binom{1, 2, 3\ldots}{a, b, d\ldots}$ $\binom{2, 3, 4\ldots}{b, c, d\ldots}$

N—1tionen des namlichen Zeigers von der erſten an, welche c zum Anfangselemente hat, die Klaſſe $\mathfrak{N}\binom{3,\ 4,\ 5\cdots}{c,\ d,\ e\ldots}$ aus u. ſ. w.

Die Vergleichung dieſer beiden Sätze giebt die verlangte Gleichung, nämlich dieſe:

$$\overset{0}{\mathfrak{N}}\binom{1,\ 2,\ 3\cdots}{a,\ b,\ c\ldots} = a\overset{-1}{\mathfrak{N}}\binom{1,\ 2,\ 3\cdots}{a,\ b,\ c\ldots} + b\overset{-1}{\mathfrak{N}}\binom{2,\ 3,\ 4\cdots}{b,\ c,\ d\ldots} + c\overset{-1}{\mathfrak{N}}\binom{3,\ 4,\ 5\cdots}{c,\ d,\ e\ldots} + d\mathfrak{N}\binom{4,\ 5,\ 6\cdots}{d,\ e,\ f\ldots} + e\mathfrak{N}\binom{5,\ 6,\ 7\cdots}{e,\ f,\ g\ldots} + \ldots$$

6. *Zuſatz.*

Es laſsen ſich die n—1ten Klaſſen für die Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3\cdots}{a,\ b,\ c\ldots}$, $\binom{2,\ 3,\ 4\cdots}{b,\ c,\ d\ldots}$, $\binom{3,\ 4,\ 5\cdots}{c,\ d,\ e\ldots}$ u. ſ. w. ſämmtlich auf eine einzige Klaſſe nämlich auf die $n$te des Zeigers $\binom{1,\ 2,\ 3\cdots}{a,\ b,\ c\ldots}$ reduciren. *a*).

7. *Zuſatz.*

Die im 5ten Zuſatze entwickelte Gleichung, ſtellet folgendes deutlich vor Augen:

1) Die $n$te Klaſſe beſitzt ſo viele Complexionen der Ordnung a, als die n—1te Klaſſe Complexionen überhaupt hat.

2) Die $n$te Klaſſe enthält ſo viele Complexionen der Ordnung b als die n—1te Klaſſe noch auſser denen der Ordnung a beſitzt.

3)

a) Es iſt hierbei aber zu bemerken, daſs ſich ein jeder Zeiger mit dem Buhſtabenelemente endigen muſs, womit ſich der Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3\cdots}{a,\ b,\ c\ldots}$ endigt.

3) Der *n*ten Klaſſe kommen ſo viele Complexionen der Ordnung *c* zu als die n—1te Klaſſe noch auſser denen der Ordnung *a* und *b* hat. u. ſ. w.

Es gilt daher folgende allgemeine Regel: wenn man wiſsen will wie viele Complexionen der Ordnung *p* die *n*te Klaſſe hat, ſo braucht man nur zu zählen wie viele Complexionen von der Ordnung *p* und den folgenden Ordnungen die n—1te Klaſſe beſitzt.

Hiernach läſst ſich leicht eine Figur ſchreiben, welche für eine beſtimmte Anzahl combinirter Elemente deutlich angiebt wie viele Complexionen von jeder Ordnung eine jede Klaſſe enthält, denn man hat nur nöthig zuerſt eine Reihe von Einſen neben einander zu ſchreiben welche ſich auf die Unionen beziehn und hieraus nach jener allgemeinen Vorſchrift eine zweite zu folgern deren einzelne Glieder die Anzahl der Binionen jeder Ordnung angiebt u. ſ. w. wie dieſe Figur zeigt:

	e	d	c	b	a
A	1	1	1	1	1
B	1	2	3	4	5
C	1	3	6	10	15
D	1	4	10	20	35
E	1	5	15	35	70
..	.	.	.	.	.

Es ſind hierbei die fünf verſchiedenen Elemente a, b, c, d, e als die combinirten angenommen und daher neben einander über die erſte Zahlenreihe geſetzt. Die Zahlen die ſich mit einem dieſer Buchſtaben in der nämlichen Vertikalreihe befinden, beſtimmen wie viele Complexionen der Ordnung dieſes Buchſtabens, die daneben-ſtehende Klaſſe in ſich begreift. Hiernach zeigt z. B. in der vierten Horizontalreihe die Zahl 20 an, daſs die Klaſſe D, 20 Complexionen der Ordnung *b* enthält.

Vergleicht man die horizontalen Zahlenreihen mit einander so bietet sich ein noch einfacheres Gesetz dar die nächstfolgende aus der vorhergehenden herzuleiten als das zuerst gegebene ist, wovon aber doch dieses einfachere blos als eine Folgerung angesehn werden kann. Das Gesetz ist folgendes: Wenn man das *p*te Glied der *m*ten Reihe haben will, so addirt man das *p*—1te Glied der *m*ten Reihe zum *p*ten Gliede der *m*—1ten Reihe. Es kann also die Figur auf eine leichte Weise so weit fortgesetzt und auch auf so viele Elemente ausgedehnt werden, als man will. Um das letzte zu können braucht man nur zuerst die erste horizontale Zahlenreihe fortzusetzen.

Wenn man die Figur ansieht, so fällt sogleich in die Augen, dass die *m*te vertikale Zahlenreihe mit der *m*te horizontalen völlig übereinstimmt, es lässt sich daher auch die Figur nach jenem Gesetze durch ein Schreiben vertikaler Zahlenreihen neben einander construiren, so dass man zuerst alle Zahlen schreibt, welche sich auf die Complexionen der Ordnung des letzten, hierauf die welche sich auf die Complexionen der Ordnung des vorletzten Elements beziehn u. s. w. Es kann also die Figur nach einer und derselben Regel auf doppelte Weise construirt werden, man geht nämlich entweder immer von einer Reihe für eine Klasse zu der Reihe für die nächstfolgende Klasse oder man geht von einer Reihe für die nächstfolgende Ordnung zu der Reihe für die nächstvorhergehende Ordnung über.

In der Natur des Gesetzes, nach welchen hier immer die nächstfolgende Reihe aus der nächstvorhergehenden abgeleitet wird, liegt die Gewissheit, das einer jeden ein allgemeines endliches Glied zukömmt. Die allgemeinen Glieder sind diese: Das *n*te Glied der ersten Reihe ist 1, das der zweiten $\frac{n}{1}$ das der dritten gleich $\frac{n \cdot n + 1}{1 \cdot 2}$, das der vierten gleich $\frac{n \cdot n + 1 \cdot n + 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ u. s. w.

Für

Für r Elemente a, b, c, d, ... x, y, z hat man daher diese Figur:

	z	y	x	w	v	.....	a
'A	1	1	1	1	1	.....	1
'B	1	2	3	4	5	.....	$\frac{r}{1}$
'C	1	3	6	10	15	.....	$\frac{r\,r+1}{1\,.\,2}$
'D	1	4	10	20	35	.....	$\frac{r\,.\,r+1\,.\,r+2}{1\,.\,2\,.\,3}$
'E	1	5	15	35	70	.....	$\frac{r\,.\,r+1\,.\,r+2\,.\,r+3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$
n	"	"	"	"	"	.....	" " " "

§. 25.

Lehrſatz.

Bei *r* verſchiedenen Elementen iſt die Anzahl der Complexionen der *m*ten Combinationsklaſſe mit Wiederholungen, gleich

$$\frac{r\,.\,r+1\,.\,r+2\,.\,r+3\,....\,(r+m-2)\,(r+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,....\,m-1\,.\,m}$$

Beweis.

Es kommen der m—1ten Klaſſe ſo viele Complexionen überhaupt zu, als die *m*te Klaſſe Complexionen der Ordnung *a* h n (§. 24, 7. Zuſ.(1)). Bedeutet alſo nc, *numerus complexionum*, ſo iſt nach der letzten Figur des §. 24.

$$\text{nc.}'A = r \qquad \text{nc.}'B = \frac{r\,.\,r+1}{1\,.\,2},$$

$$\text{nc.}'C = \frac{r\,.\,r+1\,.\,r+2}{1\,.\,2\,.\,3} \text{ und so überhaupt nc. } 'M$$

$$= \frac{r\,.\,r+1\,.\,r+2\,.\,r+3\,...\,(r+m-2)\,(r+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.....\,m-1\,.\,m}.$$

β) Von den Combinationen überhaupt ohne Wiederholungen.

§. 26.

Aufgabe.

Es werden die Combinationen ohne Wiederholungen für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4 \cdots}{a, b, c, d \ldots}$ verlangt.

α) Rein combinatorische Auflösung.

1) Man schreibe die Unionen neben einander, dies giebt A'.

2) Man setze dem Elemente *b* und den folgenden, *a* vor; hierauf schreibe man dem Elemente *c* und den folgenden, *b* vor; dann setze man vor *d* und die folgenden Elemente den Buchstaben *c* u. s. w. so bekömmt man B'.

3) Aus B' leite man die Ternionen der Ordnungen a, b, c, d, u. s. w. her indem man allen Binionen mit dem Anfangselemente *b* und den folgenden Binionen, den Buchstaben *a*; den Binionen die sich mit c, d, e u. s. f. f. anfangen, den Buchstaben b vorsetzt u. s. w. Dies giebt C'.

4) Auf die nämliche Weise, wie man C' aus B' findet, erhält man wieder D' aus C', E' aus D' u. s. w.

Die einzelnen Klassen schreibt man in der Ordnung wie man sie bekömmt unter einander.

Beweis.

Dass man durch diese Auflösung keine Combinationen mit Wiederholungen bekömmt, erhellet aus ihren vorgeschriebenen Verfahren hinreichend; dass sie aber auch alle Combinationen ohne Wiederholungen giebt, sieht man daraus, weil aus der Anname des Gegentheils

eine

eine Abſurdität folgt. Denn geſetzt es fehlte *abcd*, ſo müſste auch *bcd* und deswegen *cd* und aus dieſem Grunde *d* fehlen; dieſes iſt aber gegen die erſte Vorſchrift der Auflöſung.

Beiſpiele.

a,	b,	c,	d,	e	A`
	ab	ac	ad	ae	
		bc	bd	be	B`
			cd	ce	
				de	
		abc	abd	abe	
			acd	ace	C`
				ade	
			bcd	bce	
				bde	
				cde	
			abcd	abce	D`
				abde	
				acde	
				bcde	E`
				abcde	

1,	2,	3,	4,	5	A`
	12	13	14	15	
		23	24	25	B`
			34	35	
				45	
		123	124	125	
1, 2, 3, 4			134	135	C`
a, b, c, d				145	
			234	235	
				245	
				345	
			1234	1235	D`
				1245	
				1345	
				2345	E`
				12345	

Anmerkung.

Die Darſtellung welche die Auflöſung giebt iſt eine Involution in Rückſicht auf die Anzahl der Elemente und das Evolviren geſchieht durch grade vertikale Linien. Die hierunterſtehende Figur wird dies deutlich zeigen.

a	b	c	d	
	ab	ac	ad	A`
		bc	bd	B`
			cd	
		abc	abd	
			acd	C`
			bcd	
			abcd	D`

Hiermit vergleiche man (§. 24, a Rein comb. Aufl. 1. Anmerk.)

Zusatz.

Die Art und Weise wie nach der gegebenen Auflösung immer eine Klasse aus der nächstvorhergehenden hergeleitet wird, läßt sich allgemein durch eine Gleichung darstellen.

$$\mathfrak{N}^{0}_{(a,b,c..)} = a\,\mathfrak{N}^{-1}_{(1,2,3..)} + b\,\mathfrak{N}^{-1}_{(2,3,4..)} + c\,\mathfrak{N}^{-1}_{(3,4,5..)} + d\,\mathfrak{N}^{-1}_{(4,5,6..)} + \mathfrak{N}^{-1}_{(5,6,7..)} + ..$$

Diese Gleichung lehrt aus den n—1ten Klassen für die Zeiger $\binom{2,3,4..}{b,c,d..}$ $\binom{3,4,5..}{c,d,e..}$ $\binom{4,5,6..}{d,e,f..}$, u. s. w. eine einzige, nämlich die *n*te Klasse für den Zeiger $\binom{1,2,3..}{a,b,c..}$ zu machen.

2)

Rein combinatorische Auflösung.

1) Man schreibe die Elemente, wie sie im Zeiger folgen in einer Reihe unter einander, so hat man $\mathfrak{A}^{0}$

2) Man setze allen, *a* ausgenommen, das Element *a* vor, so hat man die Binionen der Ordnung *a*. Aus den Binionen der Ordnung *a* leite man die der Ordnung *b* her indem man von der an, die *c* zum zweiten Elemente hat, *a* in *b* verwandelt. Aus diesen Binionen der Ordnung *b* folgere man die der Ordnung *c* indem man von der an, welche sich mit *d* endigt für das Element *b* das nächstfolgende *c* setzt. Auf ähnliche Weise leite man aus den Binionen der Ordnung *c*, die der Ordnung *d*; aus diesen wieder die der Ordnung *e* her, u. s. w. und setze diese Binionen der Ordnungen b, c, d u. s. w. wie

man

man sie findet unter die der Ordnung *a*. Die gefundenen Binionen machen die Klasse B'.

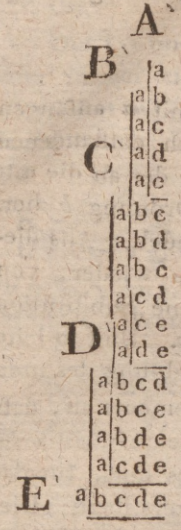
3) Allen Binionen, die sich nicht mit *a* anfangen schreibe man *a* vor. Aus den hierdurch entstandenen Ternionen der Ordnung *a*, leite man von der an die mit *ac* anfängt dadurch die Binionen der Ordnung *b* her, dass man ihr erstes Element *a* in *b* verwandelt. Aus diesen Ternionen der Ordnung *b* folgern man wieder, von der an, die sich mit *bd* anfängt, durch eine Substitution der *c* für *b*, die Ternionen der Ordnung *c*. Und so leite man überhaupt aus den Ternionen der Ordnung des *n*ten Elements, die Ternionen des $n+1$ten Elements ab, dass man von der an, deren beide erste Elemente nicht zwei zunächst auf einander folgende des Zeigers sind, für das erste Element das nächstfolgende des Zeigers setzt. Diese Ternionen schreibe man bei ihrer Construction so unter einander, wie es bei den Binionen geschieht. Ist die letzte Ternion hingeschrieben, die man durch die gegebene Regel finden konnte, so hat man die Klasse C'.

4) Auf die nämliche Weise, wie man C' aus B' abgeleitet hat, leite man auch D' aus C', E' aus D' her u. s. w.

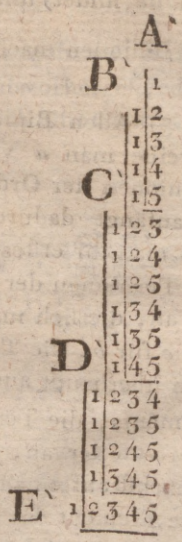
Beweis.

Wenn man diese Auflösung mit der ersten vergleicht, so fällt sogleich in die Augen, dass beide das nämliche geben müssen, und dass daher auch die zweite Auflösung richtig seyn muss, weil es die erste ist.

Beiſpiele.



$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ a, & b, & c, & d, & e \end{pmatrix}$

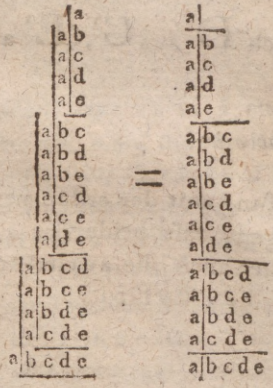


Anmerkung.

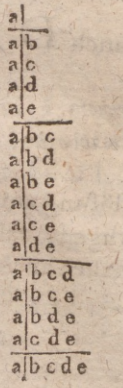
Dieſe Darſtellung iſt keine Involution in Rückſicht auf die Klaſſen, auch iſt ſie nicht als eine Involution in Hinſicht auf die Anzahl der Elemente anzuſehn (§. 24, 1te und 2te Anmerk.).

1. *Zuſatz.*

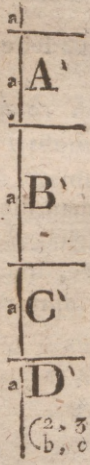
Es iſt



$=$



$=$



$\begin{pmatrix} 2, & 3, & 4, & 5 \\ b, & c, & d, & e \end{pmatrix}$

Die-

Diese Relation giebt die Gleichung

$$A' + B' + C + D' + \ldots + \mathfrak{N}' = {}_{a}{}^{(1,2,3,4\ldots)}_{(a,b,c,d\ldots)} + {}_{a}A' + {}_{a}B' + {}_{a}C' + {}_{a}D' + \ldots + {}_{a}\mathfrak{N}',$$

welche lehrt, wie aus den Combinationen für den Zeiger $\binom{2,3,4,5\ldots}{b,c,d,e\ldots}$ unmittelbar die für den Zeiger $\binom{1,2,3,4\ldots}{a,b,c,d\ldots}$ erhalten werden können.

Die Vergleichung der ersten Figur mit der letzten führt auch noch auf diese Gleichungen;

$$A' = {}_{a}{}^{(1,2,3\ldots)}_{(a,b,c\ldots)} + A', \quad B' = {}_{a}A' + B', \quad C' = {}_{a}B' + C', \text{ u. s. w. so dass } \overset{o}{\mathfrak{N}}{}' = {}_{a}\overset{-1}{\mathfrak{N}}{}' + \overset{o}{\mathfrak{N}}{}'$$

ist. Hieraus erhellet wie überhaupt eine Klasse für den Zeiger $\binom{1,2,3\ldots}{a,b,c\ldots}$ aus zwei zunächst auf einander folgenden Klassen für den Zeiger $\binom{2,3,4\ldots}{b,c,d\ldots}$ gemacht werden kann.

2. Zusatz.

Die Gleichung $\overset{o}{\mathfrak{N}}{}' = {}_{a}\overset{-1}{\mathfrak{N}}{}' + {}_{b}\overset{-1}{\mathfrak{N}}{}' + {}_{c}\overset{-1}{\mathfrak{N}}{}' + \ldots$,

$\binom{1,2,3\ldots}{a,b,c\ldots}\ \binom{2,3,4\ldots}{b,c,d\ldots}\ \binom{3,4,5\ldots}{c,d,e\ldots}\ \binom{4,5,6\ldots}{d,e,f\ldots}$

welche sich bei der ersten Auflösung sogleich darbiethet, fol-

folgt aus der zweiten ebenfalls. Es ist hier der Ort von ihr Gebrauch zu machen.

Wenn man sie betrachtet, so lehrt sie ausser dem, was schon bei der ersten Auflösung bemerkt ist, noch folgendes:

1) Die *n*te Klasse der Elemente a, b, c, d u. s. w. besitzt so viele Complexionen der Ordnung *a*, als die n—1te ausser denen der Ordnung *a* besitzt.

2) Der *n*ten Klasse kommen so viele Complexionen der Ordnung *b* zu, als die n—1te ausser denen von der Ordnung *a* und *b* enthält.

3) Die *n*te Klasse hat so viele Complexionen der Ordnung *c* als die n—1te ausser denen der Ordnung a, b und c besitzt.

u. s. w.

Will man also überhaupt wissen, wie viele Complexionen der Ordnung *p* die *n*te Klasse hat, so braucht man nur zu zu zählen wie viele Complexionen von der Ordnung *q* und den folgenden Ordnungen in der n—1ten Klasse vorhanden sind. Hiernach läfst sich wie bei den Combinationen mit Wiederholungen (§. 24, 7. Zusatz) eine Figur zeichnen, die deutlich angiebt wie viele Complexionen einer jeden Ordnung eine jede Klasse enthält.

	f,	e,	d,	c,	b,	a
A	1	1	1	1	1	1
B	0	1	2	3	4	5
C	0	0	1	3	6	10
D	0	0	0	1	4	10
E	0	0	0	0	1	5
F	0	0	0	0	0	1

Die

Die Einrichtung dieſer Figur iſt die nämliche wie bei der in §. 24, 7. Zuſatz.

Die Vergleichung der einzelnen horizontalen Zahlenreihen führt auf ein noch einfacheres Geſetz, allemal die folgende aus der nächſtvorhergehenden abzuleiten, als vorhin angegeben wurde, nämlich um das pte Glied der mten Reihe zu erhalten, braucht man nur die beiden p—1ten Glieder der mten und m—1ten Reihe zu addiren. Da nun die erſte Reihe nur Einſen enthält und jede der übrigen ſich mit o anfängt, ſo ſieht man leicht ein, daſs ſich die Figur durch eine ſehr einfache Addition ſo weit ausdehnen läſst, als man will.

In der angeführten Regel die nächſtfolgende Horizontalreihe aus der nächſtvorhergehenden herzuleiten liegt die Nothwendigkeit, daſs einer jeden der genannten Reihen ein allgemeines Glied zukömmt. Das n 1te Glied für die erſte Reihe iſt 1; für die zweite, n; für die dritte, $\frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}$; für die vierte, $\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; für die fünfte, $\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ u. ſ. w. Man hat daher für rElemente a, b, c, ... x, y, z dieſe Figur:

	z y x w v . . . a		
A	1 1 1 1 1 . . . 1		1
B	0 1 2 3 4 . . . $r-1$		r
C	0 0 1 3 6 . . . $\frac{r-1 \cdot r-2}{1 \cdot 2}$		$\frac{r \cdot r-1}{1 \cdot 2}$
D	0 0 0 1 4 . . , $\frac{r-1 \cdot r-2 \cdot r-3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$		$\frac{r \cdot r-1, r-2}{1 \cdot 2 \cdot ,}$
//	// // // // // . . . //	//	// //

Von dieſer Figur wird in der Folge noch Gebrauch gemacht.

Dar-

Darstellung einzelner Klassen der Combinationen überhaupt ohne Wiederholungen.

§. 27.

Bei den Combinationen mit Wiederholungen giebt die zweite rein combinatorische Auflösung die gesuchten Klassen so, dass sie eine einzige Klasse bilden in der sie involvirt sind, es kann daher durch diese Auflösung auch sogleich jede verlangte einzelne Klasse prompt dargestellt werden. Es war daher nicht nöthig noch besondere Aufgaben für die Bestimmungen einzelner Klassen zu geben. Hingegen bei den Combinationen ohne Wiederholungen dürfen diese nicht übergangen werden, weil keine der beiden rein combinatorischen Auflösungen für die Bestimmung aller Klassen eine Involution in Rücksicht auf die Klassen ist. (§. 24, α, Rein comb. Aufl. 2, Anmerk.).

§ 28.

Aufgabe.

Es wird die mte Klasse der Combinationen überhaupt ohne Wiederholungen für den Zeiger $\binom{1,2,3,4\ldots}{a,b,c,d\ldots}$ verlangt.

Rein combinatorische Auflösung.

1) Man schreibe die ersten m Elemente des Zeigers gutgeordnet neben einander. Dies giebt die erste Complexion

2) Für das letzte Element dieser Complexion setze man successiv die höhern Elemente, bis man auf das letzte des Zeigers kömmt.

3) In der zuletzt gefundenen Complexion verwandele man das vorletzte Element in das nächstfolgende des Zei-

Zeigers und ſchreibe das Element daneben, welches ihm im Zeiger folgt, und leite aus dieſer Complexion wieder nach 2) andere her.

4) Iſt dies geſchehn, ſo verfahre man mit der letzten dieſer Complexionen aufs neue wie es 3) vorſchreibt und ſetze dieſes Verfahren überhaupt ſo lange fort, bis man auf eine Complexion kömmt, deren vorletztes und letztes Element mit dem vorletzten und letzten des Zeigers einerlei ſind.

5) Hierauf ſubſtituire man in der Complexion, die man zuletzt erhielt, für das vorvorletzte Element das nächſtfolgende des Zeigers und ſchreibe neben das ſubſtituirte gutgeordnet die zwei Elemente, die von ihm, dem Zeiger nach, die nächſthöhern ſind und wende auf dieſe Complexion wieder die Vorſchriften von 2) 3) und 4) an.

6) Aus der letzten Complexion laſſe man nach 5) wieder andere entſtehn und ſetze dies ſo lange fort, bis die drei letzten gutgeordneten Elemente der Complexion die drei letzten des Zeigers ſind.

7) Iſt dies der Fall ſo nehme man in der zuletzt erhaltenen Complexion mit dem Elemente das dem vorvorletzten vorhergeht die Subſtitution vor, daſs man für daſſelbe das ihm im Zeiger zunächſtfolgende ſchreibt und ſetze die Elemente, welche dem Zeiger nach von dem ſubſtituirten die drei nächſthöhern ſind, gutgeordnet daneben und folgere hieraus nach 2, 3, 4, 5 und 6 wieder neue Complexionen.

8) Auf die zuletzt hierdurch gefundene Complexion, wende man dann wieder die Vorſchrift von 7 an und fahre hiermit ſo lange fort, bis man auf eine Complexion kömmt, deren vier letzte gutgeordnete Elemente die vier letzten des Zeigers ſind.

Hieraus erhellet schon hinreichend wie weiter zu verfahren ist und dafs die ganz letzte Complexion eine gutgeordnete Mtion seyn wird, deren Elemente die m letzten des Zeigers sind.

Beweis.

Die gefundenen Complexionen sind gewifs gutgeordnete Mtionen, es kann aber auch keine fehlen, weil der Mangel irgend einer auch den der zuerst hingeschriebenen voraussetzt. Denn gesetzt es fehlte für die Elemente a, b, c, d, e, f, wenn von der dritten Klasse die Rede ist, die Complexion a b e f, so müfste auch a b d f, ferner a b d e, a b c f, a b c e und so auch a b c d übergangen seyn, weil diese nach der gegebenen Auflösung in umgekehrter Ordnung aus einander folgen.

Beispiele.

$$\binom{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}{a, b, c, d, e, f, g}$$

	a b c d e	1 2 3 4 5
	a b c d f	1 2 3 4 6
	a b c d g	1 2 3 4 7
	a b c e f	1 2 3 5 6
	a b c e g	1 2 3 5 7
	a b c f g	1 2 3 6 7
	a b d e f	1 2 4 5 6
E'	a b d e g	1 2 4 5 7 E'
	a b d f g	1 2 4 6 7
	a b e f g	1 2 5 6 7
	a c d e f	1 3 4 5 6
	a c d e g	1 3 4 5 7
	a c d f g	1 3 4 6 7
	a c e f g	1 3 5 6 7
	a d e f g	1 4 5 6 7
	b c d e f	2 3 4 5 6
	b c d e g	2 3 4 5 7
	b c d f g	2 3 4 6 7
	b c e f g	2 3 5 6 7
	b d e f g	2 4 5 6 7
	c d e f g	3 4 5 6 7

2)

Rein combinatorische Auflösung.

1) Man schreibe das mte und die folgenden Elemente des Zeigers gutgeordnet unter einander.

2) Man setze jedem derselben das m—1te Element des Zeigers vor und leite aus den hierdurch entstandenen Binionen der Ordnung des m—1ten Elements die Binionen der Ordnung des mten, aus diesen wieder die Binionen der Ordnung des m+1ten Elements ab u. s. f. und zwar dadurch, dafs man das erste Element aller derjenigen Binionen in das nächstfolgende des Zeigers verwandelt, deren zweites Element nicht in dem Zeiger zunächst auf ihr erstes folge.

3)Vor die gefundenen Binionen schreibe man das m—2te Element des Zeigers und folgere aus den hierdurch entstandenen Ternionen wieder successiv so die Ternionen der höhern Ordnungen, wie man aus den Binionen der Ordnung des m—1ten Elements die Binionen der Ordnungen der höhern Elemente bekömmt.

4) Sämmtlichen Ternionen schreibe man das m—3te Element des Zeigers vor und lasse aus den dadurch erhaltenen Quaternionen wieder, nach dem in 2 und 3 angegebenen Ableitungsgesetze, die Quaternionen höherer Ordnungen entstehn.

5) Dieses Verfahren setze man so lange fort als für den gegebenen Zeiger möglich ist.

Beweis.

Es findet jedesmal eine gutgeordnete N—1tion ohne Wiederholungen statt, (deren Elemente zu den m—1 letzten des Zeigers gehören), aus welcher sich eine gegebene gutgeordnete Ntion ohne Wiederholungen, (deren Elemente aus den *m* letzten des Zeigers genommen sind), dadurch machen läfst, dafs man ihr entweder blofs das Element vorschreibt, welches von dem letzten des Zeigers ange-

den welche sich auf diesen Bogen befinden und statt ihrer die

angerechnet das mte iſt, oder daſs man für dieſes vorgeſchriebene ſucceſſiv noch die nächſthöhern Elemente des Zeigers ſubſtituirt. Auf dieſe Weiſe leitet aber die Auflöſung aus einer Klaſſe für die letzten p Elemente des Zeigers, allemal die nähſthöhere Klaſſe für die letzten p+1 Elemente des Zeigers her; folglich iſt klar, da die Auflöſung, wenn der Zeiger q Elemente hat, zuerſt die erſte vollſtändige Klaſſe für die letzten q—(m—1) Elemente giebt, das ſie auch die ganze zweite Klaſſe der Combinationen ohne Wiederholungen für die letzten q+1—(m—1) Elemente, daſs ſie deswegen wieder die ganze dritte Klaſſe für die letzten q+2—(m—1) Elemente und das ſie ſo endlich die mte Klaſſe für die letzten q+(m—1)—(m—1) d. h. für alle Elemente des Zeigers geben muſs.

Beiſpiele

$\binom{1,2,3,4,5,6,7,8}{a,b,c,d,e,f,g,h}$

a b c d e f	1 2 3 4 5 6	
a b c d e g	1 2 3 4 5 7	
a b c d e h	1 2 3 4 5 8	
a b c d f g	1 2 3 4 6 7	
a b c d f h	1 2 3 4 6 8	
a b c d g h	1 2 3 4 7 8	
a b c e f g	1 2 3 5 6 7	
a b c e f h	1 2 3 5 6 8	
a b c e g h	1 2 3 5 7 8	
a b c f g h	1 2 3 6 7 8	
F a b d e f g	1 2 4 5 6 7	F
a b d e f h	1 2 4 5 6 8	
a b d e g h	1 2 4 5 7 8	
a b d f g h	1 2 4 6 7 8	
a b e f g h	1 2 5 6 7 8	
a c d e f g	1 3 4 5 6 7	
a c d e f h	1 3 4 5 6 8	
a c d e g h	1 3 4 5 7 8	
a c d f g h	1 3 4 6 7 8	
a c e f g h	1 3 5 6 7 8	
a d e f g h	1 4 5 6 7 8	
b c d e f g	2 3 4 5 6 7	
// // //	// // //	An-

Anmerkung.

Beide Auflöſungen geben für einen und denſelben Zeiger die nämliche Darſtellung der mten Klaſſe, allein das Verfahren, welches ſie bei der Conſtruction beobachten iſt ſehr verſchieden. Die erſte Auflöſung nämlich, geht gleich von der erſten ganzen Complexion der mten Klaſſe aus und geht von dieſer ſo weiter fort, daſs ſie allemal die nächſtfolgende ganze Complexion aus der nächſtvorhergehenden herleitet; hingegen bei der zweiten Auflöſung ſtellt man z. B. um $F'_{\binom{1,2,3,..8}{a,b,c,..h}}$ zu erhalten, zuerſt die erſte Klaſſe für die Elemente f, g, h, auf, aus dieſer folgert man die zweite Klaſſe für die Elemente e, f, g, h, hieraus leitet man wieder die dritte Klaſſe für die Elemente d, e, f, g, h ab u. ſ. w. und zwar ſo, daſs man jedesmal bei den Uebergange zu einer höhern Klaſſe alle vorhergende in dieſe involvirt, und folglich ganz involutoriſch verfährt.

§. 28.

Lehrſatz.

Für r verſchiedene Elemente iſt die Anzahl der Complexionen der *m*ten Klaſſe der Combinationen ohne Wiederholungen gleich

$$\frac{r \cdot r-1 \cdot r-2 \cdot r-3 \cdot \ldots \cdot (r-(m-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot m}$$

Beweis.

Es iſt in der Figur des zweiten Zuſatzes zur zweiten Auflöſung in §. 26 allemal das r + 1te Glied irgend einer horizontalen Zahlenreihe gleich der Summe des 1ten, 2ten, 3ten u. ſ. w. des rten Gliedes der nächſtvorhergehenden Reihe. Da nun dieſe Summe der Glieder einer Reihe die Anzahl aller Complexionen der danebenſtehen-

den Klaſſe beſtimmt, ſo erhellet aus der letzten Figur des §. 26, in welcher die Glieder der letzten Vertikalreihe die r+1ten Glieder der horizontalen Reihen ſind, zu welchen ſie gehören, daſs nc. $A' = r$, nc. $B' = \frac{r.r-1}{1.2}$, nc. $C' = \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3}$ u. ſ. w. iſt und daſs überhaupt nc. $\mathfrak{M}' = \frac{r.r-1.r-2.r-3....(r-(m-1))}{1.2.3.4.....m}$ ſeyn muſs.

γ. Von den Combinationen zu beſtimmten Summen mit Wiederholungen.

§. 29.

Aufgabe.

Es ſollen für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4...v}{a, b, c, d...n}$ alle Combinationen, mit Wiederholungen, zur Summe v gefunden werden.

1)

Arithmetiſch-combinatoriſche Auflöſung.

1) Man ſchreibe v hin; dieſes Element macht die Klaſſe ^{v}A.

2) Hieraus mache man nach den Regeln welche die Auflöſung der Aufgabe des §. 10 vorſchreibt, die aweizifrigen, dreizifrigen, vierzifrigen Zahlen u. ſ. w. Die zweizifrigen geben die Klaſſe ^{v}B, die dreizifrigen, die Klaſſe ^{v}C, die vierzifrigen die Klaſſe ^{v}D u. ſ. w.

Die

Die Subſtitution der Buchſtaben für die mit ihnen correſpondirenden Zifern giebt die geſuchten Buchſtabencombinationen.

Beweis.

Durch die Vorſchrift der Auflöſung der Aufgabe des §. 10 findet man hier gewiſs alle gutgeordnete Zahlen zur Summe ν und zwar zuerſt die einzifrige, dann die zweizifrigen, hierauf die dreizifrigen u. ſ. f. Eine jede dieſer Zahlen iſt eine Combination zur Summe ν und auſser ihnen kann gar keine Combination zur Summe ν gedacht werden, denn gäbe es eine ſolche Zahlencombination, ſo bildete dieſe eine Zahl zur Summe ν, welche nicht nach den Regeln der Auflöſung der gedachten Aufgabe gefunden werden könnte. Für die Zahlencomplexionen giebt alſo die einzifrige Zahl die Klaſſe $^{\nu}A$, die zweizifrigen geben die Klaſſe $^{\nu}B$, die dreizifrigen die Klaſſe $^{\nu}C$ u.ſ.w. und da mit einer jeden Buchſtabencomplexion eine Zahlencomplexion correſpondirt, ſo iſt einleuchtend, daſs man durch die Subſtitution der Buchſtaben die verlangten Buchſtabencombinationen bekömmt.

Beiſpiele.

		(1, 2, 3, 4, 5, 6 / a, b, c, d, e, f)		
f	^{f}A		6	^{6}A
ae			15	
bd	^{6}B		24	^{6}B
cc			33	
aad			114	
abc	^{6}C		123	^{6}C
bbb			222	
aaac	^{6}D		1113	^{6}D
aabb			1122	
aaaab	^{6}E		11112	^{6}E
aaaaaa	^{6}F		111111	^{6}F

2)

α) Rein combinatoriſche Auflöſung.

1) Man ſetze das höchſte Element des Zeigers als einzelnes Ding hin, ſo hat man $^{\nu}A$.

2) Um die folgenden Klaſſen zu erhalten beobachte man die Regeln, nach welchen überhaupt aus der vorhergehenden Klaſſe, die nächſtfolgende gefunden wird.

α) Man ſchreibe allen Complexionen der vorhergehenden Klaſſe, welche ſich nicht mit mehrern unter ſich gleichen Elementen endigen, das erſte Element des Zeigers vor und ſetze für das letzte Element das im Zeiger nächſtvorhergehende.

β) Man ſuche unter den hierdurch gefundenen Complexionen, diejenigen auf, welche ſich ſo wenig mit mehrern gleichen Elementen anfangen als endigen und ſubſtituire für dieſer Complexionen erſtes Element das nächſtfolgende des Zeigers und für ihr letztes Element das nächſtvorhergehende des Zeigers.

γ) Aus dieſen jetzt gefundenen Complexionen ſuche man wieder auf die nämliche Weiſe, nämlich nach β andere zu erhalten und aus dieſen leite man wieder nach eben derſelben Regel andere ab und ſetze dieſes Verfahren überhaupt ſo lange fort als es ſich thun läſst.

Kann es nicht mehr fortgeſetzt werden, weil alle Complexionen worauf die Vorſchrift β) angewandt werden müſste, entweder mehrere gleiche Anfangs oder Endelemente oder beides zugleich haben, ſo hat man die ganze Klaſſe gefunden.

Beweis.

Dafs die Auflöfung nur gutgeordnete Complexionen zur Summe ν giebt iſt einleuchtend; es braucht daher nur noch bewieſen zu werden, dafs man durch ſie auch alle mögliche gutgeordnete Complexionen zur Summe ν bekömmt. Dies erhellet folgendermafsen: Geſetzt man fände durch ſie eine gutgeordnete Ntion von der Ordnung a nicht, ſo müſste man durch ſie auch die N—ıtion nicht finden, die entſteht, wenn man in der gedachten Ntion das erſte Element a wegſtreicht und für ihr letztes das nächſtfolgende des Zeigers ſubſtituirt (α). Fehlte eine Ntion der Ordnung b, ſo müſste auch die Ntion der Ordnung a fehlen, die man aus der genannten Ntion der Ordnung b erhält, wenn man für ihr erſtes Element den Buchſtaben a und für ihr letztes das nächſtfolgende des Zeigers ſetzt (β). Hätte man aber dieſe Ntion der Ordnung a nicht, ſo fehlte wegen α) auch wieder eine N—ıtion. Eben ſo läſst ſich überhaupt zeigen, dafs der Mangel irgend einer Ntion den Mangel einer N—ıtion vorausſetzt. Findet man alſo durch die Auflöſung alle N—ıtionen, ſo erhält man durch ſie auch alle Ntionen.

Man bekömmt aber durch ſie gewiſs $^{\nu}A$, folglich auch $^{\nu}B$ und aus dieſem Grunde auch $^{\nu}C$ u. ſ. w. alle Klaſſen, die für die Summe ν bei dem gegebenen Zeiger möglich ſind.

Hierhergehörige Beiſpiele ſind die zur erſten Auflöſung gegebenen.

1. *Anmerkung.*

Die gegebene Auflöſung giebt eine Involution, in ſo fern nämlich als ſie nicht nur ſucceſſiv die erſte, 2te,

3te Klaſſe u. ſ. w. der Complexionen zur Summe ν, ſondern auch die Complexionen zur Summe $\nu-1$, $\nu-2$, $\nu-3$ u. ſ. f. darſtellt. Hat man nämlich durch die Auflöſung die Klaſſen der Complexionen zur Summe ν entwickelt, ſo braucht man nur um die Klaſſen zur Summe $\nu-m$ zu evolviren, dieſe Vorſchriften beobachten:

1) In der m ıten Klaſſe ſchneide man das letzte Element der erſten Complexion aus, Dies iſt $^{\nu-m}A$.

In der m+2ten Klaſſe trenne man die beiden letzten Elemente jeder Complexion von den vorhergehenden Elementen durch einen Vertikalſtrich und ziehe unter die letzte Complexion, die ſich mit dem erſten Elemente des Zeigers anfängt einen Horizontalſtrich, ſo entſteht ein Winkel. Die Complexionen, welche dieſer Winkel enthält, machen $^{\nu-m}B$ aus.

3) In der m+3ten Klaſſe trenne man die drei letzten Elemente jeder Complexion von den vorhergehenden Elementen durch einen Vertikalſtrich und ziehe unter die letzte der Complexionen, die ſich mit dem erſten Elemente des Zeigers anfangen einen Horizontalſtrich, ſo erhält man einen Winkel, worinn die Ternionen enthalten ſind, welche $^{\nu-m}C$ ausmachen.

8

		1	7			7	A
			2	6			
			3	5			
			4	4			
	1	1	0			7	B
	1	2	5				
	1	3	4				
	2	2	4				
	2	3	3				
1	1	1	5			7	C
1	1	2	4				
1	1	3	3				
1	2	2	3				
2	2	2	2				
1	1	1	4			7	D
1	1	2	3				
1	2	2	2				
1	1	1	1	3		7	E
1	1	1	2	2			
1	1	1	1	1	2	7	F
1	1	1	1	1	1	7	G

4) Man erhält überhaupt $^{\nu-m}\mathfrak{N}$, wenn man in der m + nten Klasse zwischen die letzten n Elemente und die, welche vor diesen stehn, einen Vertikalstrich zieht und dann die Complexionen, welche sich mit dem ersten Elemente des Zeigers anfangen von den daruntersthenden durch einen Horizontalstrich trennt.

2. *Anmerkung.*

Da die Involution wovon hier die Rede ist, die Complexionen zur bestimmten Summe klassenweise giebt, so nennt man sie eine Klasseninvolution, in Gegensatz einer andern (3) ?, Rein comb. Aufl.) welche diese Complexionen nicht klassenweise darstellt,

Es ist aber die Klasseninvolution nur eine unvollständige Involution. (§. 13, Erklärung.).

Zusatz.

Es ist $^{n}J = {}^{n}A + {}^{n}B + {}^{n}C + {}^{n}D + {}^{n}E + .. + {}^{n}\mathfrak{N}$.

3.

β. *Rein combinatorische Auflösung.*

1) Man schreibe das Element hin, welches dem Zeiger nach das erste ist, so hat man die Complexion zur Summe 1.

2) Hieraus leite man die Complexionen zur Summe 2, aus diesen die Complexionen zur Summe 3, hieraus die Complexionen zur Summe 4 u. s. w. aus denen zur Summe $\nu-1$ die zur Summe ν nach folgender Vorschrift her:

Man setzt vor alle Complexionen zur nächstvorhergehenden Summe das erste Element des Zeigers, hierauf

sucht

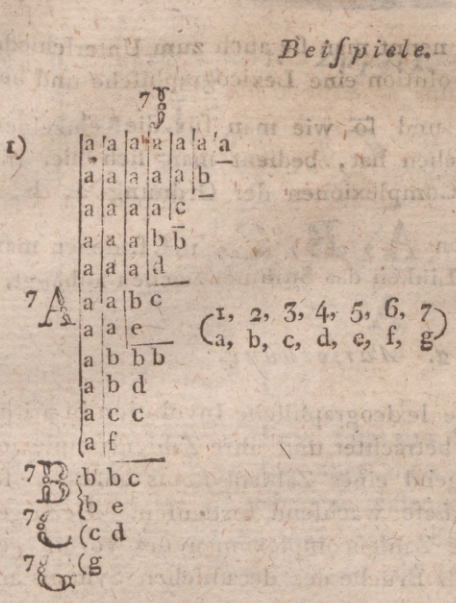
ſucht man unter denen welchen das erſte Element jezt vorgeſchrieben iſt, von der erſten an, die auf, deren zwei erſte Anfangselemente nicht unter ſich gleich ſind, ſchreibt für das erſte Element derſelben das nächſtfolgende des Zeigers und ſetzt die hierdurch gefundenen Complexionen, in der Ordnung wie ſie gefunden ſind unter die welche man vorher durch das Vorſetzen des erſten Elements des Zeigers erhalten hatte.

Beweis.

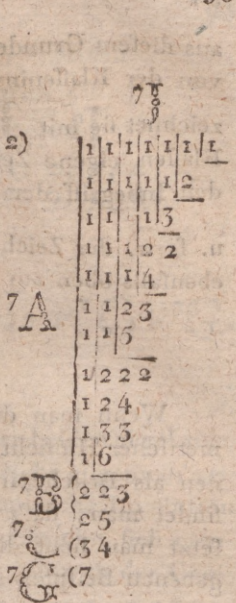
Die gutgeordneten Complexionen zu irgend einer Summe fangen ſich entweder mit dem erſten oder mit einem andern Elemente des Zeigers an. Im erſten Falle macht man daraus Complexionen zur nächſtvorhergehenden Summe, wenn man ihnen ihr erſtes Element nimmt und im zweiten Falle wenn man ihr erſtes Element in das nächſtvorhergehende des Zeigers verwandelt, wodurch Complexionen mit zwei verſchiedenen Anfangselementen entſtehn. Hat man alſo alle gutgeordnete Complexionen zu irgend einer Summe, ſo erhält man durch ſie gewiſs alle zur nächſtfolgenden Summe, wenn man ihnen ſämmtlich das erſte Element des Zeigers vorſetzt und bei ſolchen, die verſchiedene Anfangselemente haben, für das erſte Element das nächſtfolgende des Zeigers ſchreibt. Da man nun durch die Auflöſung die Complexion zur Summe 1 zuverläſsig erhält, ſo findet man offenbar durch ſie auch alle Complexionen zur Summe 2 und deswegen wieder alle zur Summe 3 u. ſ. w. zur Summe $\nu-1$ und daher auch alle zur Summe ν.

Beiſpiele.

1)



2)



1. *Anmerkung.*

Aus dem ganzen Gange, den die zweite rein combinatoriſche Auflöſung zur Darſtellung ihrer Complexionen nimmt, erhellet, daſs ſie ebenfalls eine Involution in Rückſicht auf die Summe giebt und ſchon der erſte Blick auf die beiden eben entwickelten Figuren lehrt, daſs dieſe Involution alle Erforderniſſe einer vollſtändigen hat (§. 13, Erklärung). Ihre Complexionen ordnet ſie aber nicht nach Klaſſen ſondern ganz lexicographiſch (a), aus

a) Bei der Klaſſeninvolution gehn die Complexionen jeder einzelnen Klaſſe auch lexicographiſch fort, aber ihre Complexionen überhaupt, beobachten unter ſich keine lexicographiſche Ordnung. Die lexicographiſche hat darinn einen Vorzug, daſs ihre Darſtellung leichter iſt, aber in Betracht der gröſsern Anwendung auf die Analyſis verdient wohl die Klaſſeninvolution vorgezogen zu werden. Es läſst ſich indeſſen die lexicographiſche ſehr leicht in eine Klaſſeninvolution verwandeln.

aus diesem Grunde nennt man sie auch zum Unterschiede von der Klasseninvolution eine Lexicographische und bezeichnet sie mit $\mathfrak{J}$ und so wie man für die einzelnen Klassen eigene Zeichen hat, bedient man sich hier für den Inbegriff der Complexionen der Ordnung a, b, c u. s. w. der Zeichen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, u. s. f. denen man ebenfalls oben zur Linken das Summenzeichen anhängt,

2. *Anmerkung.*

Wenn man die lexicographische Involution in arithmetischer Hinsicht betrachtet und ihre Zahlencomplexionen als Brüche irgend eines Zahlensystems ansieht, so findet man, dass diese wachsend fortlaufen. Denn gesetzt man sieht die Zahlencomplexionen des vorhin gegebenen Beispiels als Brüche des decadischen Systems an, so erhält man, 0,1111111 : 0,111112 : 0,11113; 0,11122; 0,1114; 0,1123; 0,115; 0,1222; 0,124; 0,133; 0,16; 0,223; 0,25; 0.34; 0,7. Diese Betrachtung giebt die merkwürdige Relation der lexicographischen Involution zur Klasseninvolution, dass bei beiden die Complexionen als Zahlen wachsend fortgehn, dass diese aber bei der Klasseninvolution, ganze Zahlen, hingegen bei der lexicographischen, Brüche eines Zahlensystems sind.

3. *Anmerkung.*

Die lexicographische Involution lässt viele nützliche Umwandlungen ihrer Form zu, diese sollen daher angegeben werden, wenn zuvor die beiden Gleichungen aufgestellt sind, welche die Vergleichung der lexicographischen mit der Klasseninvolution und die Betrachtung der lexicographischen allein, sogleich darbiethet.

1. *Zu-*

1. *Zuſatz.*

Es iſt $^{n}J_{\binom{1,2,3,4\ldots}{a,b,c,d\ldots}} = {}^{n}\mathfrak{J}_{\binom{1,2,3,4\ldots}{a,b,c,d\ldots}}$

2. *Zuſatz.*

Es iſt $^{7}\mathfrak{J}_{\binom{1,2,3,4,5,6,7}{a,b,c,d,e,f,g}} = {}^{7}\mathfrak{A} + {}^{7}\mathfrak{B} + {}^{7}\mathfrak{C} + {}^{7}\mathfrak{G}.$

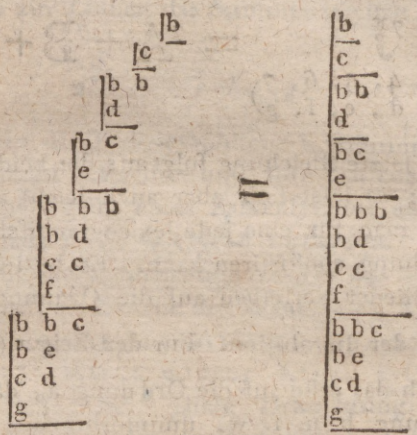
Dieſe letzte Gleichung folgt aus den beiden gegebenen Beiſpielen; es läſst ſich aber auch leicht allgemein zeigen, wie man für eine jede lexicographiſche Involution eine Gleichung conſtruiren kann. Es beziehn ſich nämlich die Glieder derſelben auf die Ordnungen der Complexionen der Involution. Für den Zeiger $\binom{1,2,3\ldots}{a,b,c\ldots}$ bezieht ſich das erſte auf die Ordnung a, das zweite auf die Ordnung b u. ſ. w. ununterbrochen fort bis zur Ordnung der vorletzten Complexion. Zwiſchen der Ordnung der vorletzten und letzten Complexion oder zwiſchen der vorletzten und letzten Ordnung entſteht aber eine Lücke, ausgenommen bei der Involution zur Summe 2. Um alſo die Glieder der Gleichung zu kennen, kömmt es nur darauf an, daſs man die vorletzte und letzte Ordnung zu beſtimmen weiſs. Dies geſchieht folgendermaſsen: Für die Summe *m* iſt *m* ſelbſt die letzte Complexion und folglich der damit correſpondirende Buchſtabe auch die letzte Ordnung. Die vorletzte Complexion iſt eine Binion und entweder iſt ihr erſtes Element als Zahl eben ſo groſs oder um 1 kleiner als das zweite Element. Läſst ſich alſo die Zahl *m* in zwei gleiche Theile zerlegen, ſo beſtimmt der mit dieſem Theile correſpondirende Buchſtabe auch die vorletzte Ordnung. Kann aber *m* nicht in zwei gleiche Theile zerfället werden, ſo zerlegt man ſie in zwei Theile,

wo-

wovon der eine um 1 kleiner als der andere ist und die Ordnung des kleinern ist alsdenn die vorletzte.

3. Zusatz.

Läfst man im ersten Beispiele das Element a weg so erhält man die Figur



In der zweiten Figur befindet sich zwischen jeden zwei Horizontalstrichen eine lexicographische Involution, denn z. B. zwischen dem fünften Paare jener Linien liegt eine solche Involution zur Summe 6 wie aus

b | b b
b | d
c c
f

deutlich erhellet.

Diese Involutionen beziehn sich auf den Zeiger $\binom{2, 3, 4 \ldots}{b, c, d \ldots}$, sie sind aber keine vollständige, weil die Involution zur Summe n nicht auch die Complexionen zu allen vorhergehenden Summen enthält, denn z. E. in dem angeführten Beispiele, sind aufser den Complexionen zur Summe 6, nur noch die zur Summe 4 und 2 enthalten.

Die

Die Conſtruction dieſer Involutionen geſchieht unabhängig von einander folgendermaſsen:

1) Man ſetzt b oder c hin, nachdem die Summenzahl für welche man die Complexionen ſucht eine grade oder ungrade Zahl iſt.

2) Man ſchreibt dem hingeſetzten Elemente, b vor und ſetzt unter dieſe Complexion das Element, welches mit ihr einerlei Summenzahl hat.

3) Man ſetzt die Involution ſo weit als nöthig iſt, nach folgender allgemeinen Regel fort: Um aus den Complexionen zur Summe n—2 die zur Summe *n* zu erhalten, wird

α) allen gedachten Complexionen b vorgeſchrieben. Dies giebt die Complexionen der Ordnung b.

β) Unter dieſen Complexionen der Ordnung b, werden die aufgeſucht, welche weder zwei gleiche Anfangs- noch Endelemente haben und hierinn wird für das erſte Element, das ihm im Zeiger folgende und für das letzte das im Zeiger ihm vorhergehende ſubſtituirt. Iſt dies geſchehn, ſo hat man die Complexionen der Ordnung c.

γ) Auf dieſelbe Weiſe leitet man aus dieſen Complexionen der Ordnung c, wieder die der Ordnung d her u. ſ. f.

δ) Laſſen ſich auf ſolche Art weiter keine Complexionen bilden, ſo ſetzt man unter die zuletzt hingeſchriebene das einzelne Element welches mit ihr einerlei Summenzahl hat.

Beiſpiel.

$^{11}\mathfrak{J}$

b	b	b	b	c		
b	b	b	e			
b	b	c	d			
b	b	g				
b	c	c	c			
b	c	f				
b	d	e				
b	i					
c	c	e				
c	d	d				
c	h					
d	g					
e	f					
l						

(2, 3. 4..) (b, c, d..)

4. Zuſatz.

Es iſt

a	a	a	a	a	a	a
a	a	a	a	a	b	
a	a	a	a	c		
a	a	a	b	b		
a	a	a	d			
a	a	b	c			
a	a	e				
a	b	b	b			
a	b	d				
a	c	c				
a	f					
b	b	c				
b	e					
c	d					
g						

$=$

a^6	a					
a^5	b					
a^4	c					
a^3	b	b				
a^3	d					
a^2	b	c				
a^2	e					
a^1	b	b	b			
a^1	b	d				
a^1	c	c				
a^1	f					
a^0	b	b	c			
a^0	b	e				
a^0	c	d				
a^0	g					

$=$

a^6	a
a^5	$^2\mathfrak{J}$
a^4	$^3\mathfrak{J}$
a^3	$^4\mathfrak{J}$
a^2	$^5\mathfrak{J}$
a^1	$^6\mathfrak{J}$
a^0	$^7\mathfrak{J}$

(2, 3, 4..) (b, c, d..)

Dies giebt die Gleichung

$$^7\mathfrak{J} = a^6 a + a^5\,{}^2\mathfrak{J} + a^4\,{}^3\mathfrak{J} + a^3\,{}^4\mathfrak{J} + a^2\,{}^5\mathfrak{J} +$$

(1, 2, 3..) (a, b, c..)

(2, 3, 4, ...) (b, c, p, ...)

$$a^1\,{}^6\mathfrak{J} + a^0\,{}^7\mathfrak{J}$$

wor-

woraus für die Summe n diese folgt:

$$\overset{n}{\mathfrak{J}}{}^{\binom{1,2,3,4\ldots}{a,b,c,d\ldots}} = a^{n-1}a + a^{n-2}\overset{2}{\mathfrak{J}}{}^{\binom{2,3,4\ldots}{b,c,d\ldots}} + a^{n-3}\overset{3}{\mathfrak{J}} + a^{n-4}\overset{4}{\mathfrak{J}} + \cdot + a^{0}\overset{n}{\mathfrak{J}}$$

Setzt man die Glieder dieser Gleichung unter einander und neben jedes seinen entwickelten Werth und zieht dann zwischen den Gliedern und ihren Werthen einen Vertikalstrich, so erhält man diese Figur:

$\overset{n}{\mathfrak{J}}{}^{\binom{1,2,3,4\ldots}{a,b,c,d\ldots}}$

$\binom{1,2,3,4\ldots}{a,b,c,d\ldots}$

$\|$

$a^{n-1}a =$	a^{n-1} (a)
$a^{n-2}\overset{2}{\mathfrak{J}} =$	a^{n-2} (b)
$a^{n-3}\overset{3}{\mathfrak{J}} =$	a^{n-3} (c)
$a^{n-4}\overset{4}{\mathfrak{J}} =$	a^{n-4} (b^2, d)
$a^{n-5}\overset{5}{\mathfrak{J}} =$	a^{n-5} (bc, e)
$a^{n-6}\overset{6}{\mathfrak{J}} =$	a^{n-6} (b^3, bd, c^2, f)
$a^{n-7}\overset{7}{\mathfrak{J}} =$	a^{n-7} (b^2c, be, cd, g)
$a^{n-8}\overset{8}{\mathfrak{J}} =$	a^{n-8} (b^4, b^2d, bc^2, bf, ce, d^2, h)
$a^{n-9}\overset{9}{\mathfrak{J}} =$	a^{n-9} (b^3c, b^2e, bcd, bg, c^3, cf, de, i)
$a^{n-10}\overset{10}{\mathfrak{J}} =$	a^{n-10} (b^5, b^3d, b^2c^2, b^2f, bce, bd^2, bh, c^2d, cg, df, e^2, k)
u. f. w.	u. f. w. u. f. w.

$\binom{2,3,4\ldots}{b,c,d\ldots}$

Das Gesetz nach welchem die Widerholungsexponenten der a fortgehn liegt hier deutlich vor Augen. Das Fortschreitungs-Gesetz für die Complexions-Reihen, denen die a vorgesetzt sind, ist dieses:

Um die *m*te Reihe zu erhalten schreibt man 1) allen Complexionen der m—2ten Reihe b vor; hierauf substituirt man 2) in allen Complexionen der m—1ten Reihe, welche zwei ungleiche Anfangselemente haben, für das erste das nächstfolgende des Zeigers $\binom{2,\ 3,\ 4,\ .}{b,\ c,\ d.\ .}$ und schreibt 3) die Complexionen welche 1 und 2 geben, in der Ordnung wie sie gefunden werden neben einander.

Anmerkung.

Diese Darstellung ist die vollständigste Involution, die sich denken läßt, weil bei ihr der Fortgang zu dem Folgenden völlig offen steht und das Absondern des Vorhergehenden von dem Folgenden durch ein Ziehn eines einzigen Horizontalstrichs geschieht. Denn will man z. B. $\overset{9}{\int}\overset{r}{}$ haben, so braucht man nur unter a $\overset{n-9}{\int}\overset{r}{}$ und den $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ .}{a,\ b,\ c,\ d.\ .}$ dazugehörigen Werth einen Strich zu ziehn, was sich dann über diesem Striche befindet giebt die verlangte lexicographische Involution, so bald man darinn statt *n* die Zahl 9 setzt.

5. *Zusatz.*

Ordnet man in der Figur des vierten Zusatzes, die Complexionen welche in Klammern eingeschlossen sind so neben einander, dass die einbuchstabige die erste ist und dieser, lexicographisch, die zweibuchstabigen, dann die dreibuchstabigen Complexionen folgen u. s. w. und dass hierbei die Complexionen der Involution überhaupt,

zu-

zugleich so übereinander kommen, dass sich die *ein* buchstabigen sämmtlich durch einen Vertikalstrich von den zweibuchstabigen, diese wieder auf die nämliche Weise von den dreibuchstabigen trennen lassen u. s. w. so erhält man wenn dies letzte geschieht, diese Figur:

$$^{n}J\begin{pmatrix}1, & 2, & 3..\\ a. & b, & c..\end{pmatrix}$$

a^{n-1}	a				1
a^{n-2}	b				2
a^{n-3}	c				3
a^{n-4}	d	b^2			4
a^{n-5}	e	bc			5
a^{n-6}	f	bd cc	b^3		6
a^{n-7}	g	be cd	b^2c		7
a^{n-8}	h	bf ce d^2	b^2d bc^2	b^4	8
a^{n-9}	i	bg cf de	b^2e bcd c^3	b^3c	9
a^{n-10}	k	bh cg df e^2	b^2f bce bd^2 c^2d	b^3d b^2c^2	b^5 10

Die Zahlen welche in der Figur neben dem Doppelstriche stehn, zählen von oben nach unten die Horizontalcolumnen, so sind z. B. f, bd, cc b^3 Complexionen der 6ten Columne.

Das Gesetz für die Construction dieser Figur, ist dieses:

1) Es werden a^{n-1}, a^{n-2}, a^{n-3}, a^{n-4} u. s. w. in eine Vertikalreihe unter einander geschrieben.

c) Hierneben setzt man die Unionen, a, b, c, d .., wie sie im Zeiger folgen,

3) Sämmtlichen Unionen, a ausgenommen, setzt man b vor und schreibt diese Binionen so neben die Unionen, dass die erste um zwei Columnen tiefer steht als b.

4) Unter diesen sucht man, von der ersten an, die auf, welche sich mit zwei verschiedenen Elementen anfangen und verwandelt das erste Element derselben in das nächstfolgende des Zeigers und schreibt die hierdurch entstandenen Binionen so neben die der Ordnung b, dass die erste der Ordnung c um *eine* Columne tiefer steht als die der Ordnung b, aus der sie abgeleitet ist. Auf gleiche Weise leitet man aus den Binionen der Ordnung c die der Ordnung d, aus diesen wieder die der Ordnung e her u. s. f, und ordnet die Complexionen der nächstfolgenden Ordnung q jedesmal so neben die der nächstvorhergehenden Ordnung p, dass die erste Complexion der Ordnung q um *eine* Columne tiefer kömmt als die der Ordnung p steht aus der man sie gemacht hat.

5) Vor alle Binionen schreibt man b und setzt die hierdurch erhaltene erste Ternion um 2 Columnen tiefer als die erste Binion steht und zwar zugleich so, dass sie durch eine Vertikallinie von der letzten Binion getrennt werden kann; die Ternionen selbst aber, ordnet man so neben einander, wie die Binionen geordnet sind, aus welchen man sie abgeleitet hat. Aus diesen Ternionen der Ordnung b folgert man wieder die der Ordnung c, wie man bei den Binionen aus denen der Ordnung b die der Ordnung c folgert und schreibt die Ternionen die man hierdurch erhält, einzeln so neben die Ternionen der Ordnung b, dass eine jede um eine Columne tiefer kömmt als die steht, aus welcher sie gemacht ist. Auf die nämliche Weise wie man die Ternionen der Ordnung c bekömmt, erhält man auch die der Ordnung d, aus diesen wieder die der Ordnung e u. s. f. und beobachtet hierbei in Rücksicht auf das Nebeneinanderschreiben die Vorschrift nach

wel-

welcher die Ternionen der Ordnung c neben die der Ordnung b geſchrieben werden,

6) Alle Operationen, welche 5) vorſchreibt nimmt man wieder vor um die Quaternionen zu erhalten, hierauf wieder um die Quinionen zu bekommen u. ſ. w.

Anmerkung.

Die Figur des vierten Zuſatzes giebt die lexicographiſche Involution für eine jede beſtimmte Summe, die Figur dieſes fünften Zuſatzes hingegen, die Klaſſeninvolution jeder Summe. Um die Klaſſen für jede Summe z, B. für die Summe 7 zu erhalten, hat man hier folgende Operationen vorzunehmen:

1) Man ſubſtituirt für n die Zahl 7 und zieht unter a° und die daneben liegenden Complexionen einen Strich.

2) Um eine Klaſſe z. B. die dritte für dieſe Summe zu erhalten, ſteigt man von der Union der letzten Horizontalcolumne zu der Union herauf, welche ſich in der Columne befindet, die von der letzten angerechnet, die dritte iſt. Hierauf zieht man in Gedanken durch das Rechteck, worinn die Union liegt zu der man hinaufgeſtiegen iſt, von oben nach unten und zwar von der Linken nach der Rechten eine Diagonallinie, eben ſo wieder durch das Rechteck in deſſen einer Winkelſpitze der Endpunkt der gezogenen Diagonallinie liegt u. ſ. w. wie es in der Figur angegeben iſt.

3) Die Complexionen welche ſich in dieſen Rechtecken befinden, nämlich e, bd, cc, bbc ſchreibt man verbunden mit den ihnen zukommenden a unter einander, wie hier folgt: a a e.

a b d

a c c

b b c

Iſt dies geſchehn ſo hat man die verlangte Klaſſe.

6. *Zuſatz.*

Läſst man in der Figur des fünften Zuſatzes die Ausdrücke weg, welche a enthalten, und betrachtet

dann ihre Complexionen in Rückſicht auf den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4..}{b, c, d, e..}$, ſo ergiebt ſich:

1) daſs die Unionen die erſten Klaſſen zu den Summen 1, 2, 3, 4 u. ſ. f. ausmachen.

2) Daſs die neben dieſen Unionen zunächſtliegenden Rechtecke, von dem oberſten an, die zweiten Klaſſen zu den Summen 2, 3, 4 u. ſ. f. beſitzen.

3) Daſs neben dieſen zweiten Klaſſen ſich wieder die dritten Klaſſen zur Summe 3 und den folgenden Summen befinden.

u. ſ. w.

Hiernach kann man die gedachte Figur, wenn man die a wegläſst einfacher ſo ausdrücken.

$\binom{1, 2, 3..}{b, c, d..}$

^1A					2
^2A					3
^3A	^2B				4
^4A	^3B				5
^5A	^4B	^3C			6
^6A	^5B	^4C			7
^7A	^6B	^5C	^4D		8
^8A	^7B	^6C	^5D		9
^9A	^8B	^7C	^6D	^5E	10

Anmerkung.

Gleich der erſte Blick auf die Figur lehrt, daſs man in Stande iſt durch ſie auf eine leichte Weiſe alle Klaſſen zu jeder beſtimmten Summe zu finden; denn z. B. um alle Klaſſen zur Summe 4 zu erhalten, braucht man nur die Klaſſen zu nehmen, welche in der Diagonallinie liegen, die in der Figur angegeben iſt. Die Figur des fünften Zuſatzes giebt alſo nicht nur für den Zeiger $\binom{1, 2, 3\cdots}{a, b, c\ldots}$ ſondern auch für $\binom{1, 2, 3\cdots}{b, c, d\ldots}$ alle Klaſſen zu einer jeden beliebigen Summe. Es iſt aber ein groſser Unterſchied, wie ſie die Klaſſen für die beiden angegebenen Zeiger enthält. Für $\binom{1, 2, 3\cdots}{a, b, c\ldots}$ befinden ſich die einzelnen Complexionen, die in Verbindung mit den ihnen zukommenden a eine einzige Klaſſe ausmachen im mehrern verſchiedenen Rechtecken, hingegen für den Zeiger $\binom{1, 2, 3\cdots}{b, c, d\ldots}$ iſt in einem jeden Rechtecke jedesmal eine ganze Klaſſe enthalten.

7. *Zuſatz.*

Die Vergleichung der Figuren des 5ten und 6ten Zuſatzes giebt dieſe Gleichung:

$$^{n}J = a^{n-1}a + a^{n-2}{}^{1}A + a^{n-3}{}^{2}A + a^{n-4}\left\{\begin{matrix}{}^{3}A+\\+{}^{2}B\end{matrix}\right.$$

$$\binom{1, 2, 3\cdots}{a, b, c\ldots}$$

$$a^{n-5}\left\{\begin{matrix}{}^{4}A+\\+{}^{3}B\end{matrix}\right. + a^{n-6}\left\{\begin{matrix}{}^{5}A+\\+{}^{4}B\\+C\end{matrix}\right. + a^{n-7}\left\{\begin{matrix}{}^{6}A+\\+{}^{5}B\\+C\end{matrix}\right. + a^{n-8}\left\{\begin{matrix}{}^{7}A+\\+{}^{6}B\\+{}^{5}C\\+{}^{4}D\end{matrix}\right.$$

$$a^{n-9}\left\{\begin{matrix}{}^{8}A+\ldots\\+{}^{7}B\\+{}^{6}C\\+{}^{5}D\end{matrix}\right.$$

$$\binom{1, 2, 3, 4\cdots}{b, c, d, e\ldots}$$

Darſtellung einzelner Klaſſen der Combinationen mit Wiederholungen zu beſtimmten Summen.

§. 30.

Aufgabe.

Es wird die *m*te Klaſſe zur Summe *n* für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots}{a, b, c, d, e, f \ldots}$ verlangt.

1)

Arithmetiſch-combinatoriſche Auflöſung.

1) Man ſchreibe m—1 Einheiten neben einander und ſetze das Supplement zur Summe *n*, als letztes Element der Complexion rechts daneben, welches alſo hier gleich $n-(m-1) = n+1-m$ iſt, ſo hat man die erſte Complexion der ${}^{n}\mathfrak{M}_{m}$.

2) Aus dieſer leite man die zweite; aus der zweiten die dritte; aus der dritten die vierte Complexion u. ſ. w. nach der Regel ab, welche der 17te Satz des §. 2. überhaupt giebt um aus einer gutgeordneten Zahl die nächſtgröſsere zu der nämlichen Zifernſumme zu erhalten. Die *m*zifrige Zahl, auf welche man hierbei kömmt, aus der nach der genannten Regel keine gröſsere *m*zifrige Zahl hergeleitet werden kann, iſt die letzte Complexion der Klaſſe.

Subſtituirt man in den erhaltenen Zahlencomplexionen für die Zifern, die damit correſpondirenden Buchſtaben, ſo erhält man die geſuchten Buchſtabencomplexionen.

Beweis.

Man geht hier von der kleinſten mzifrigen gutgeordneten Zahl der Zifernſumme *n* zu allen gröſsern der nämlichen Summe fort, folglich kann keine Zahlencomplexion übergangen werden, und daher giebt auch die angegebene Subſtitution der Buchſtaben für die Zahlen, alle Buchſtabencomplexionen.

Bei-

Beiſpiele.

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ..
a, b, c, d, e, f, g ..)

	a a a g	1 1 1 7
	a a b f	1 1 2 6
	a a c e	1 1 3 5
	a a d d	1 1 4 4
10D	a b b e	1 2 2 5 10D
	a b c d	1 2 3 4
	a c c c	1 3 3 3
	b b b d	2 2 2 4
	b b c c	2 2 3 3

2)

Rein combinatoriſche Auflöſung.

1) Man durchlaufe in dem Zeiger, von der Zahl *n* an, von der Rechten nach der Linken, *m* Elemente und ſetze das *m*te Element worauf man hierbei kömmt als Union hin.

2) Dieſer Union ſchreibe man das erſte Element des Zeigers vor, ſo hat man eine Binion. Aus dieſer Binion mache man eine zweite, indem man für ihr erſtes Element das nächſtfolgende und für ihr letztes das nächſtvorhergehende des Zeigers ſetzt. Auf die nämliche Weiſe leite man hieraus eine dritte, aus der dritten eine vierte u. ſ. w. her und ſetze dieſes ſo lange fort bis man eine Binion bekommen hat deren beide Elemente entweder unter ſich gleich oder für den gegebenen Zeiger zwei zunächſt auf einander folgende ſind.

3) Man ſetze vor alle gefundene Binionen das erſte Element des Zeigers, ſo erhält man Binionen der Ordnung dieſes Elements. Unter dieſen ſuche man die auf, welche ſowohl zwei verſchiedene Anfangs- als Endelemente haben und ſetze für dieſer ihr erſtes Element das nächſtfolgende des Zeigers und für ihr letztes das im Zeiger nächſtvorhergehende. Hierdurch bekömmt man Ternionen

nen der Ordnung b. Auf die nämliche Weise leite man hieraus wieder, Ternionen der Ordnung c; aus diesen aufs neue Ternionen der Ordnung d her u. s. w. und setze dieses Verfahren überhaupt so lange fort, bis man auf Complexionen einer Ordnung gekommen ist, unter welchen sich keine befindet, die sowohl zwei verschiedene Anfangs- als Endelemente hat.

4) Eben so wie man aus den Binionen die Ternionen ableitet, leite man aus diesen wieder, Quaternionen, aus den Quaternionen, Quinionen her u. s. w. bis man auf diese Weise durch die M—1tionen zu den Mtionen gekommen ist. Diese machen alsdenn die verlangte Klasse aus.

Beweis.

Aus den gegebenen Regeln erhellet hinreichend, dass man durch sie nur gutgeordnete Complexionen bekömmt. Diese Complexionen haben auch die verlangte Summe; denn die Union, welche man hinschreibt ist die Zahl n— (m—1) selbst, oder correspondirt doch mit dieser. Die Binionen sind aus diesem Grunde Complexionen zur Summe n—(m—2); die Ternionen haben die Summe n—(m—3), u. s. f. die Mtionen die Summe n—(m—m), also die gegebene Summe n. Es kann aber auch keine Mtion fehlen, denn nähme man an, dass irgend eine z. B. von der Ordnung d fehlte, so müsste man auch die von der Ordnung c nicht haben, welche entsteht, wenn man in der fehlenden von der Ordnung d, das erste Element d in das nächstvorhergehende und das letzte in das nächstfolgende des Zeigers verwandelt. Auf gleiche Weise setzt dieser Mangel wieder den einer Mtion der Ordnung b und dieser wieder das Fehlen einer Complexion der Ordnung a voraus. Hätte man aber eine Mtion der Ordnung a nicht, so müsste auch wieder die M—1tion zur Summe n—1 übergangen seyn, welche man aus der fehlenden der Ordnung a dadurch bekömmt, dass man das erste Element ganz wegläßt.

Hier-

Hieraus würde aber wieder eben so der Mangel einer M—2tion zur Summe n—2 folgen, wie aus dem Mangel einer Mtion das Fehlen einer M—1tion folgte und auf gleiche Weise würde wieder das Auslassen der gedachten M—2tion vorausfetzen, dafs auch eine M—3tion zur Summe n—3 u. f. w. eine Binion zur Summe n—(m—2) und zuletzt eine Union zur Summe n—(m—1) fehlte. Dies letzte ist aber nicht möglich, weil die genannte Union zuerst hingeschrieben wird.

Beispiele.

(1, 2, 3, 4, 5. 6, 7, 8, 9, 10, 11, . . .
a, b, c, d, e, f, g, h, i, k l, . . .)

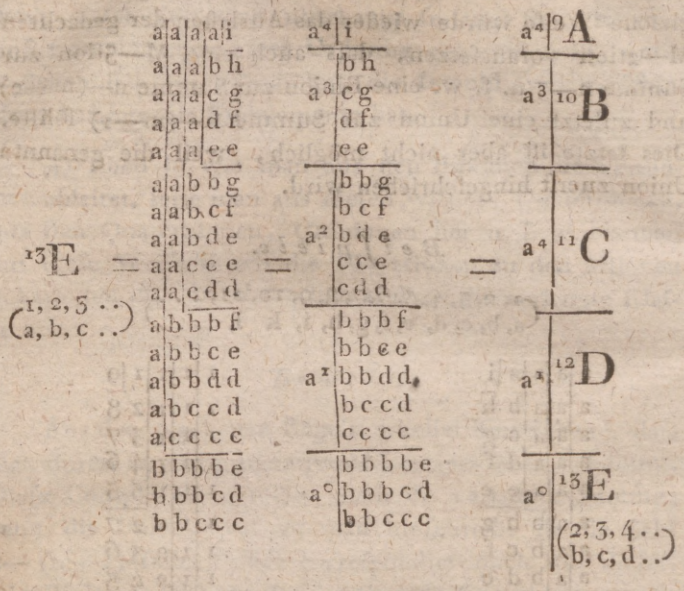
	a	a	a	a	i	1	1	1	1	9
	a	a	a	b	h	1	1	1	2	8
	a	a	a	c	g	1	1	1	3	7
	a	a	a	d	f	1	1	1	4	6
	a	a	a	e	e	1	1	1	5	5
	a	a	b	b	g	1	1	2	2	7
	a	a	b	c	f	1	1	2	3	6
	a	a	b	d	e	1	1	2	4	5
13E	a	a	c	c	e	1	1	3	3	5 13E
	a	a	c	d	d	1	1	3	4	4
	a	b	b	b	f	1	2	2	2	6
	a	b	b	c	e	1	2	2	3	5
	a	b	b	d	d	1	2	2	4	4
	a	b	c	c	d	1	2	3	3	4
	a	c	c	c	c	1	3	3	3	3
	b	b	b	b	e	2	2	2	2	5
	b	b	b	c	d	2	2	2	3	4
	b	b	c	c	c	2	2	3	3	3

Anmerkung.

Das Verfahren der zweiten Auflösung ist völlig involutorisch, daher auch ihre Darstellungen Involutionen sind, wie aus den eben gegebenen Beispielen deutlich erhellet.

1. *Zusatz.*

Es ist



Hieraus folgt die Gleichung

$$^{13}E = a^4\,{}^{9}A + a^3\,{}^{10}B + a^2\,{}^{11}C + a^1\,{}^{12}D + a^0\,{}^{13}E,$$

$$\binom{1,2,3,4,\cdot\cdot}{a,b,c,d\cdot\cdot} \qquad \binom{2,3,4\cdot\cdot}{b,c,d\cdot\cdot}$$

welche allgemein für die Summe r+n ausgedrückt diese Form hat:

$$^{r+n}\mathfrak{N} = a^{n-1^{r+1}}A + a^{n-2^{r+2}}B + a^{n-3^{r+3}}C + \cdot\cdot + a^{n-m^{r+m}}\mathfrak{M} + \cdot\cdot$$

$$\binom{1,2,3,4\cdot\cdot}{a,b,c,d\cdot\cdot} \quad \binom{2,3,4\cdot\cdot}{b,c,d\cdot\cdot}$$

2. *Zu-*

2. *Zusatz.*

Die Klassen ^{r+1}A, ^{r+2}B, ^{r+3}C, ^{r+4}D u. s. f.

$\left(\begin{smallmatrix}2,&3,&4,&5\ldots\\b,&c,&d,&e\ldots\end{smallmatrix}\right)=$

findet man, wenn ^{r}A, ^{r}B, ^{r}C, ^{r}D u. s. w. nach

$\left(\begin{smallmatrix}1,&2,&3\ldots\\b,&c,&d\ldots\end{smallmatrix}\right)$

einer der beiden ersten Auflösungen des §. 29. aufgesucht werden. Denn wenn man die Klassen zur Summe r für den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix}1,&2,&3\ldots\\b,&c,&d\ldots\end{smallmatrix}\right)$ als Klassen für den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix}2,&3,&4\ldots\\b,&c,&d\ldots\end{smallmatrix}\right)$ ansieht, so giebt man dadurch jedem Elemente der Species jener Klassen einen um 1 höhern Werth; also aus der Union zur Summe r wird eine Union zur Summe r+1; aus den Binionen zur Summe r, werden Binionen zur Sur Summe r+2; aus den Ternionen zur Summe r, werden Ternionen zur Summe r+3 u. s. f. so dass also

^{r}A, ^{r}B, ^{r}C, ^{r}D und ^{r+1}A, ^{r+2}B, ^{r+3}C, ^{r+4}D

$\left(\begin{smallmatrix}1,&2,&3\ldots\\b,&c,&d\ldots\end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix}2,&3,&4\ldots\\b,&c,&d\ldots\end{smallmatrix}\right)$

in Rücksicht auf ihre Buchstabencomplexionen völlig mit einander übereinstimmen.

Es kann daher auch der letzten Gleichung des ersten Zusatzes diese Form gegeben werden:

$$^{r+n}\mathfrak{N}_{\left(\begin{smallmatrix}1,&2,&3,&4\ldots\\a,&b,&c,&d\ldots\end{smallmatrix}\right)} = a^{n-1}\,{}^{r}A_{\left(\begin{smallmatrix}1,&2,&3,&4\ldots\\b,&c,&d,&e\ldots\end{smallmatrix}\right)} + a^{n-2}\,{}^{r}B + a^{n-3}\,{}^{r}C + \ldots + a^{n-m}\,{}^{r}\mathfrak{M} + \ldots.$$

wobei zu bemerken ist, dass man die Glieder so weit fortsetzen muss, bis $m=n$ oder $=r$ wird, d. h. so lange bis man auf $a^{0}\,{}^{r}\mathfrak{N}$ oder zu $a^{n-r}\,{}^{r}R$ kömmt, nachdem $r \gtrless n$ oder $< n$ ist. Z. B.

$$^{15}E = a^{4\,10}A + a^{3\,10}B + a^{2\,10}C + a^{1\,10}D + a^{0\,10}E$$

$\binom{1,2,3,4\cdots}{a,b,c,d\cdots}$ $\binom{1,2,3,4\cdots}{b,c,d,e\cdots}$

$$^{8}E = a^{4\,3}A + a^{3\,3}B + a^{2\,3}C$$

3. *Zusatz.*

Die Gleichung des zweiten Zusatzes für $^{r+n}\mathfrak{N}$ giebt die merkwürdige Relation zwischen der $n$ten Klasse zur Summe r+n für den Zeiger $\binom{1,2,3,4\cdots}{a,b,c,d\cdots}$ und der Klasseninvolution zur Summe r für den Zeiger $\binom{1,2,3,4,\cdots}{b,c,d,d,\cdots}$, dass die Klasseninvolution, durch ein blosses Vorsetzen der a, in die $n$te Klasse und dass die $n$te Klasse, durch ein Trennen der a, in die Klasseninvolution verwandelt werden kann. Beides fällt auch sogleich bei der Betrachtung der mittlern Figur des 1ten Zusatzes in die Augen; wenn man die ganze Figur auf den Zeiger $\binom{1,2,3,4,\cdots}{a,b,c,d,\cdots}$ und die Klassen, welche durch einen Strich von den a getrennt sind, auf den Zeiger $\binom{1,2,3,4\cdots}{b,c,d,e\cdots}$ bezieht.

4. *Zusatz.*

Dass man einer jeden einzelnen Klasseninvolution zur Summe r, eine Complexion von a so vorsetzen soll, wie es die Gleichung des zweiten Zusatzes bestimmt, kann man dadurch anzeigen, dass man dem Zeichen ^{r}J ein a mit dem Wiederholungsexponenten n—* vorschreibt, wo * alsdenn mit dem Klassenexponenten (§. 12, 8. Erkl.) übereinstimmt. Hiernach lässt sich also die Gleichung des 2ten Zusatzes auch so ausdrücken:

$^{r+n}\mathfrak{N}$

$$\overset{r+n}{\underset{(a,\,b,\,c,\,d\ldots.)}{\mathfrak{N}}}{}^{(1,\,2,\,3,\,4\ldots,)} = 2^{n-r}\overset{r}{\underset{(b,\,c,\,d,\,e\ldots)}{\mathfrak{J}}}{}^{(1,\,2,\,3,\,4\ldots)} \quad a).$$

§. 31.

Anmerkung.

Bei der Aufgabe des §. 30. ist der Zeiger so angenommen, dafs es für sie keine Complexionen geben kann, die deswegen unnütze sind, weil in ihnen höhere Elemente vorkommen, als der Zeiger enthält. Es ist aber einleuchtend, dafs sich der Zeiger so begrenzen läfst, dafs für eine Klasse zu einer gewissen Summe in der genannten Hinsicht unnütze Complexionen statt finden können. Denn so giebt es z. B. für $\overset{15}{\underset{(a,\,b,\,c,\,d)}{\mathfrak{E}}}{}^{(1,\,2,\,3,\,4)}$ funfzehn dergleichen Complexionen und es lassen sich leicht Fälle angeben, in welchen noch mehrere vorkommen. Die Auflösung, welche für die Aufgabe des §. 30. gegeben ist, nimmt hierauf nicht Rücksicht, sie befriedigt also nicht, wenn der Zeiger unnütze Complexionen zuläfst und diese doch übergangen werden sollen. Es mufs also noch die Aufgabe aufgelöset werden, die *m*te Combinationsklasse zur Summe *n* für einen Zeiger zu finden, für den es solche unnütze Complexionen giebt. Ihre Auflösung ist leicht, sobald man weifs wie die erste Complexion dieser *m*ten Klasse zur Summe *n* d. h. wie die gefunden wird, welche als Zahl betrachtet die kleinste unter allen Complexionen dieser Klasse ist; aus diesem Grunde

a) Disquisitiones Analyticae, auctore I. F. Pfaff. pag. 278. Ich habe diese Schrift schon pag. 31 genannt, ich darf nicht unterlassen auf die treffliche combinatorisch-analytische Abhandlung überhaupt aufmerksam zu machen, welche ihr zweites Kapitel über die Umkehrung der Reihen ausmacht.

Grunde ist ihr die Aufgabe des folgenden Paragraphs vorangeschickt und sie selbst erst in §. 33. aufgestellt. Um die beiden Aufgaben unter der Form, wie sie am genannten Orte gegeben sind, verstehn zu können, hat man dieses zu bemerken.

Wenn die $m$te Klasse zur Summe n nach einer der Auflösungen in §. 30. entwickelt wird, so besteht die erste Complexion derselben aus $m-1$ Einsen und ausserdem noch aus einem rechts daneben geschriebenen Elemente, dessen Zeigerzahl das Supplement von $m-1$ zu n ist. Ist also im Zeiger $\binom{1, 2, 3 \ldots \varrho}{a, b, c \ldots r}$, ϱ wenigstens gleich diesem Supplemente, folglich wenigstens gleich $n-(m-1) = n-m+1$, so kann auch ${}^{n}\mathfrak{M}\binom{1, 2, 3 \ldots \varrho}{a, b, c \ldots r}$ durch eine der gedachten Auflösungen gefunden werden, nicht aber wenn $\varrho < n-m+1$ ist. In dem Falle aber, dass $\varrho < n-m+1$ ist, muss doch $m\varrho$ wenigstens gleich n seyn; denn wenn das höchste Element ϱ, m mal gedacht noch nicht n gäbe, so wäre auch für den Zeiger $\binom{1, 2, 3 \ldots \varrho}{a, b, c \ldots r}$ keine $m$te Klasse zur Summe n möglich.

§. 32.

Aufgabe. a).

Es soll die erste Complexion der $m$ten Klasse zur Summe n für den Zeiger $\binom{1, 2, 3 \ldots \varrho}{a, b, c \ldots r}$ gefunden werden, in welchem zwar $\varrho < n-m+1$ aber $m\varrho > n$ ist.

Arith-

a) Von dieser Aufgabe wird sich schwerlich eine rein combinatorische Auflösung geben lassen, weil ihre Bedingungen sie mehr zu einer arithmetischen als combinatorischen Aufgabe machen.

Arithmetisch-combinatorische Auflösung.

1) Man dividire $\varrho m - n$ durch $\varrho - 1$ und wenn dies nicht möglich ist, weil $\varrho m - n > \varrho - 1$, so dividire man durch $\varrho - 2$ und geht auch dies nicht an so nehme man $\varrho - 3$ zum Divisor u. s. w. und wenn eine solche Division die ganze Zahl π ohne Rest giebt, so schreibe man, nachdem der Divisor $\varrho - 1$, $\varrho - 2$, $\varrho - 3$ u. s. f. $\varrho - \mu$ war, π Einsen, π Zweien, π Dreien u. s. w. π μen neben einander und lasse auf diese noch rechts hin so viele ϱ folgen, bis man eine Complexion der $m$ten Klasse hat.

2) Sollte eine der angegebenen Divisionen die ganze Zahl π geben aber noch einen Rest lassen, so muss man neben die zuerst hingeschriebenen μen noch eine 2, 3, 4. u. s. f. ν setzen, nachdem der Rest gleich $\varrho - 2$, oder gleich $\varrho - 3$ u. s. f. gleich $\varrho - \nu$ ist und erst neben diese hingesetzte Zifer so oft ϱ schreiben als nöthig ist um eine Mtion zu erhalten.

Beweis.

Schreibt man m ϱen neben einander, so hat man eine Complexion der $m$ten Klasse. Die Summe der Elemente dieser Complexion ist gleich dem Produkte ϱm; ist also ϱm gröfser als n, so muss man die Summe ihrer Elemente um so viel kleiner machen als der Überschuss $\varrho m - n$ beträgt. Diese Verringerung der Summe geschieht aber, wenn man die einzelnen Elemente der Complexion kleiner macht und da sie als Zahl betrachtet die kleinste gutgeordnete zur Summe n seyn muss die für den Zeiger $\binom{1, 2, 3 \ldots \varrho}{a, b, c \ldots r}$ statt findet, so erhellet zugleich, dass man mit der Verkleinerung ihrer Elemente bei dem ersten zur Linken anfangen und diese so vornehmen muss, dass man ein jedes Element um so viel verkleinert als möglich ist. Man muss also untersuchen ob nicht

die Complexion sich mit Einsen, oder wenn dies nicht angeht mit Zweien anfangen kann u. s. w. und wie viele Elemente solche Einsen, Zweien u. s. f, seyn können.

1) Die gröfste Zahl um welche man die einzelnen Elemente der gedachten Complexion verkleinern darf ist $\varrho-1$, die nächstkleinere ist $\varrho-2$, hierauf $\varrho-3$ u. s. w. weil $\varrho-(\varrho-1)=1$, $\varrho-(\varrho-2)=2$, $\varrho-(\varrho-3)=3$ ist u. s. w. und dem Zeiger gemäfs, das geringste Element, womit sich die Complexion anfangen kann, 1 ist. Ist der Überschufs $\varrho m-n$ gröfser als $\varrho-1$, so kann auch von den ersten einzelnen Elementen, $\varrho-1$ subtrahirt werden; ist $\varrho m-n \geqslant \varrho-1$ aber $< \varrho-2$, so läfst sich nicht $\varrho-1$ aber $\varrho-2$ subtrahiren. Sollte $\varrho m-n$ kleiner als $\varrho-1$ auch wie $\varrho-2$ aber gröfser als $\varrho-3$ seyn, so fände die Subtraction der $\varrho-1$ und $\varrho-2$ nicht statt aber die der $\varrho-3$ u. s. f. Gesetzt nun es wäre die gröfste Zahl um welche die einzelnen Elemente verkleinert werden könnten gleich $\varrho-\mu$ und man wollte wissen von wie vielen Elementen diese Zahl abgezogen werden, also wie viele Elemente gleich $\varrho-(\varrho-\mu)=\mu$ seyn dürften, so würde man dies offenbar erfahren, wenn man untersuchte, wie oft der Überschufs $\varrho m-n$ die Zahl $\varrho-\mu$ in sich begriffe, also wie grofs der Quotient $\frac{\varrho m-n}{\varrho-\mu}$ wäre. Giebt also $\varrho m-n$ durch $\varrho-\mu$ dividirt die ganze Zahl π, so mufs auch die gesuchte Complexion sich mit π μen anfangen und die übrigen Elemente können nur ϱen seyn. (*Auflösung* 1))

2) Gäbe die Division des $\varrho m-n$ durch $\varrho-\mu$ die ganze Zahl π und liefse einen gewissen Rest, der also höchstens $\varrho-2$ seyn könnte, so erhielte man dadurch noch nicht die verlangte Complexion zur Summe n, dafs man π mal, μ hinschriebe und daneben noch $m-\pi$ mal das Element ϱ setzte, weil die Summe der hierdurch erhaltenen Complexion gewifs um gedachten Rest gröfser als n wäre, es müfste daher dieser von dem ersten ϱ, neben dem

dem letzten μ, noch subtrahirt werden. Ist also der Rest gleich $\varrho-\nu$, so muss neben der letzten μ noch $\varrho-(\varrho-\nu)=\nu$ stehn, und folglich bekömmt man hier die verlangte gutgeordnete Complexion, wenn man π μen neben einander schreibt, neben diese noch das Element ν setzt und hierauf so viele ϱen folgen läßt, bis man eine Complexion von m Elementen hat. (*Auflösung*, 2.).

Beispiele.

1) Es wird für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4, 5, 6}{a, b, c, d, e, f}$ die erste oder als Zahl die kleinste Complexion von $^{28}\Pi$ verlangt.

Hier ist $m=8$, $\varrho=6$, $n=28$, also $\frac{\varrho m-n}{\varrho-1}=4$; folglich ist die gesuchte Complexion gleich $11116666=aaaafffff$.

2) Es soll für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4, 5, 6}{a, b, c, d, e, f}$ die erste Complexion der $^{40}\Pi$ angegeben werden.

Hier ist $m=8$, $\varrho=6$, $n=40$, also $\frac{\varrho m-n}{\varrho-1}=1\frac{3}{5}$. Der Rest 3 ist grösser als $\varrho-2$ aber gleich $\varrho-3$, folglich ist die verlangte Complexion gleich $13666666=acfffffff$.

3) Man verlangt die erste Complexion der 11ten Klasse zur Summe 30 für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4, 5}{a, b, c, d, e}$.

Hier ist $m=11$, $\varrho=5$, $n=30$, also $\frac{\varrho m-n}{\varrho-1}=6\frac{1}{4}$. Der Rest 1 ist kleiner als $\varrho-1$, $\varrho-2$, und $\varrho-3$ aber gleich $\varrho-4$, daher ist die zu bestimmende Complexion gleich $11111145555=aaaaaadeeee$.

§. 33.

Aufgabe.

Es soll $^{n}\mathfrak{M}\binom{1, 2, 3 \ldots \varrho}{a, b, c \ldots \nu}$ dargestellt werden, wobei angenommen wird, dafs $\varrho < n - m + 1$, aber $\varrho m > n$ ist.

Arithmetisch-combinatorische Auflösung.

Man suche nach §. 32. die erste Complexion, betrachte diese als eine Zahl und leite aus ihr successiv nach des §. 6. 17ten Satze und dessen Anmerkung unter der Bedingung alle gröfsern Zahlen her, dafs ϱ die höchste Zifer derselben seyn soll. Um die Buchstabencomplexionen zu erhalten substituire man für die Elemente der gefundenen Zahlencomplexionen die mit ihnen correspondirenden Buchstaben.

Beweis.

Man geht hier von der kleinsten gutgeordneten Zahl zur Summe n aus, die für die Zifern 1, 2, 3, ... ϱ möglich ist und folgert aus dieser die gröfsern gutgeordneten Zahlen nach einer Regel, welche nicht zuläfst, dafs eine übergangen wird, die für die gegebenen Bedingungen der Aufgabe statt findet, folglich erhält man auch durch die Auflösung alle verlangte Zahlencomplexionen und daher mufs die vorgeschriebene Substitution der Buchstaben auch alle Buchstabencomplexionen geben.

Beiſpiele.

$\binom{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}{a, b, c, d, e, f, g}$

	1 1 1 4 7	a a a d g
	1 1 1 5 6	a a a e f
	1 1 2 3 7	a a b c g
	1 1 2 4 6	a a b d f
	1 1 2 5 5	a a b e e
	1 1 3 3 6	a a c c f
	1 1 3 4 5	a a c d e
	1 1 4 4 4	a a d d d
^{14}E	1 2 2 2 7	a b b b g ^{14}E
	1 2 2 3 6	a b b c f
	1 2 2 4 5	a b b d e
	1 2 3 3 5	a b c c e
	1 2 3 4 4	a b c d d
	1 3 3 3 4	a c c c d
	2 2 2 2 6	b b b b f
	2 2 2 3 5	b b b c e
	2 2 2 4 4	b b b d d
	2 2 3 3 4	b b c c d
	2 3 3 3 3	b c c c c

§. 34.

Anmerkung.

Die Anzahl der Complexionen der Combinationen zu beſtimmten Summen mit Wiederholungen, ſowohl für einzelne als alle Klaſſen insgeſammt zu berechnen, lehrt die der Combinationslehre angehängte zweite Tabelle. *a*).

a) Dieſe iſt aus Hindenburgs Schrift genommen: Infinitinomii Dignitatum Exponentis indeterminati Hiſtoria, Leges ac Formulae pag. 170. Sie iſt ein Theil der gröſsern Eulerſchen Tafel: Nov. comment. Acad. Scient. Petrop. Tom. III. pag. 165—169.

Mit der Berechnung der Anzahl der Combinationen zu beſtimmten Summen beſchäftigt ſich Euler in dem 16ten Kapitel des erſten Theils ſeiner Introd. ad Analyſin Infinit und noch ausführlicher in der vorhin genannten Schrift Ac. Sc. Petrop. T. III. pag. 125 et ſeq.

δ. Von den Combinationen zu bestimmten Summen ohne Wiederholungen.

§. 35.

Aufgabe.

Es werden für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4 \ldots \nu}{a, b, c, d \ldots n}$ alle Combinationen ohne Wiederholungen zur Summe ν verlangt.

Rein combinatorische Auflösung.

1) Man setze ν hin, so hat man $^{\nu}A$.

2) Wenn ν nicht das zweite Element des Zeigers ist, (*a*) so schreibe man vor das Element, welches im Zeiger dem ν zunächst vorhergeht das erste Element des Zeigers, so erhält man die erste Complexion der zweiten Klasse. Aus dieser leite man die zweite, aus der zweiten die dritte, aus der dritten die vierte Complexion u. s. f. der nämlichen Klasse her, indem man jedesmal das erste Element der zuletzt gefundenen Complexion in das nächstfolgende und ihr letztes Element in das nächstvorhergehende des Zeigers verwandelt, bis man auf eine Binion kömmt, deren zweites Element im Zeiger zunächst auf ihr erstes Element folgt, oder zwischen deren beiden Elementen sich im Zeiger nur ein Element befindet.

3) Aus der zweiten Klasse leite man die dritte, aus der dritten die vierte ab u. s. f. nach folgenden allgemeinen Regeln:

α) Es

a) Wenn ν das zweite Element des Zeigers ist, sich also auf 2 bezieht, so findet hier ausser der ersten weiter keine Klasse statt.

α) Es wird allen Complexionen der nächst vorhergehenden Klasse, die nicht das erste Element des Zeigers zum Anfangselemente haben und die sich mit zwei Elementen endigen, zwischen welchen im Zeiger wenigstens noch ein Element liegt, das erste Element des Zeigers vorgesetzt und ihr letztes Element in das ihm nächstvorhergehende des Zeigers verwandelt. Dies giebt Complexionen der Ordnung des ersten Elements des Zeigers.

β) Unter den hierdurch gefundenen Complexionen werden die aufgesucht, welche sich mit zwei Elementen anfangen und endigen, zwischen denen sich im Zeiger wenigstens ein Element befindet und in diesen wird für das erste Element das nächstfolgende und für das letzte das nächstvorhergehende des Zeigers substituirt. Dies giebt Complexionen der Ordnung des zweiten Elements des Zeigers.

γ) Nach der nämlichen Vorschrift, nach welcher man aus den Complexionen der Ordnung des ersten Elements die der Ordnung des zweiten Elements gefolgert hat, leite man aus denen der Ordnung des zweiten Elements des Zeigers wieder die der Ordnung des dritten Elements und aus diesen wieder die der Ordnung des vierten Elements her u. s. w. bis man auf Complexionen einer gewissen Ordnung kömmt auf welche diese Vorschrift nicht mehr angewandt werden kann. Diese Complexionen sind dann die letzten der gesuchten Klasse.

Beweis.

Die Auflösung kann nur gutgeordnete Complexionen zur Summe v geben, dies erhellet aus ihrem vorgeschriebenen Verfahren hinreichend und eben so wenig bedarf es eines Beweises, dass durch ihre zweite Vor-

schrift keine Binionen mit Wiederholungen und daher auch durch ihre dritte Vorschrift keine Complexionen mit Wiederholungen entstehn können, dass also die Auflösung gewiss nur Combinationen ohne Wiederholungen giebt. Man erhält aber durch sie auch alle Combinationen ohne Wiederholungen zur Summe ν; denn in der zweiten Klasse kann keine fehlen, weil dieses den Mangel derjenigen wieder voraussetzen würde, die man aus der fehlenden bekömmt, wenn man ihr erstes Element in das nächstvorhergehende und das letzte in das nächstfolgende des Zeigers verwandelt. Fehlte aber diese, so würde dies den Mangel einer andern erfordern, welche aus ihr auf die nämliche Weise gemacht werden kann und es ist klar dass sich dieses Raisonnement so weit fortsetzten lässt bis man gezeigt hat, dass auch die übergangen seyn müsste aus welcher, auf die angegebene Weise, weiter keine Bision hergeleitet werden könnte. Da nun diese die zuerst hingeschriebene Bision ist, also gewiss nicht fehlt, so ist einleuchtend dass auch irgend eine andere nicht fehlen kann.

Ist dieses aber der Fall, so kann auch in irgend einer der folgenden Klassen keine Complexion übergangen werden, weil der Mangel einer Complexion eines höhern Exponenten als die Bision hat, vorausfetzt, dass eine Bision verfehlt ist. Es lässt sich nämlich aus einer jeden Ntion, wenn sie sich nicht mit dem ersten Elemente des Zeigers anfängt, auf die Weise wie bei den Binionen angegeben ist, eine vorhergehende Ntion machen, aus dieser wieder eine andere u. s. f. bis man auf eine solche kömmt deren erstes Element das erste des Zeigers ist. Fehlte also irgend eine Ntion, die nicht das erste Element des Zeigers zum Anfangselemente hat, so müsste auch eine solche fehlen, deren Anfangselement das erste des Zeigers ist. Aus dieser lässt sich aber dadurch die N—xtion machen, aus welcher sie nach der Auflösung entstehn würde, dass man ihr das erste Element nimmt und für ihr letztes

letztes das nächstfolgende des Zeigers substituirt, folglich ist einleuchtend, dass der Mangel irgend einer Ntion den einer N—ition bedingt, und dass daher keine Complexion irgend einer spätern Klasse, als die zweite ist, übergangen werden kann wofern nicht eine Binion übergangen ist. Denn nach diesem Raisonnement folgt z. B. aus dem Mangel einer Quaternion wieder der Mangel einer Ternion und hieraus wieder der einer Binion.

Beispiele.

$$\binom{1, 2, 3, 4 \ldots 12, 13}{a, b, c, d \ldots m, n}$$

	$^{13}A'$		$^{13}A'$
	13	n	
	1 12	a m	
	2 11	b l	
	3 10	c k	$^{13}B'$
$^{13}B'$	4 9	d i	
	5 8	e h	
	6 7	f g	
	1 2 10	a b k	
	1 3 9	a c i	
	1 4 8	a d h	$^{13}C'$
$^{13}C'$	1 5 7	a e g	
	2 3 8	b c h	
	2 4 7	b d g	
	2 5 6	c d f	
	3 4 6	a b c g	
$^{13}D'$	1 2 3 7	a b d f	$^{13}D'$
	1 2 4 6	a c d e	
	1 3 4 5		

1. *Anmerkung.*

Die Darstellung welche die Auflösung giebt, ist keine Involution weil selbst die ersten Erfordernisse derselben ihr fehlen. Wollte man sie für eine Involution nehmen, so könnte sie nur als eine sehr unvollständige Klasseninvolution angesehen werden.

2. *An-*

2. *Anmerkung.*

Die gegebene Auflöfung entſteht ſogleich aus der zweiten Auflöfung der Aufgabe des §. 29 wenn man dieſe dahin abändert daſs ſie keine Wiederholungen mehr geben kann. Für die dritte Auflöfung des §. 29 giebt es aber hier keine ähnliche.

Darſtellung einzelner Klaſſen der Combinationen ohne Wiederholungen zu beſtimmten Summen.

§. 36.

Aufgabe.

Es wird die mte Klaſſe zur Summe ν für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots \nu}{a, b, c, d, e, f \ldots n}$ verlangt,

Auflöſung.

1) Man ſuche im Zeiger von der Rechten nach der Linken das Element auf, welches von dem vorletzten angerechnet das $\frac{m \cdot m-1}{2}$ te iſt.

2 Dieſem ſetze man das m—1te Element des Zeigers vor, ſo hat man eine Binion. Das erſte Element dieſer Binion verwandele man in das nächſtfolgende und das letzte Element in das nächſtvorhergehende des Zeigers. Eben ſo verfahre man wieder mit der jetzt erhaltenen Binion und ſetze dies fort bis man dadurch eine Binion bekömmt, deren zwei Elemente entweder zwei zunächſt auf einander folgende des Zeigers ſind oder zwiſchen welchen ſich im Zeiger nur ein Element befindet.

3) Den ſämmtlichen Binionen ſchreibe man das m—2te Element des Zeigers vor. Iſt es geſchehn, ſo ſuche man unter den hierdurch entſtandenen Ternionen die auf, welche ſich weder mit zwei zunächſt auf einander

ander folgenden Elementen anfangen noch endigen uud ſetze für ihr erſtes Element das nächſtfolgende und für ihr letztes das nächſtvorhergehende des Zeigers. Auf die nämliche Weiſe leite man aus den jetzt gefundenen Ternionen wieder andere her und fahre hiermit überhaupt ſo lange fort bis man auf Ternionen einer gewiſsen Ordnung kömmt, auf welche dieſe Regel nicht weiter anzuwenden iſt.

4) Vor alle Ternionen ſetze man das m—3te Element des Zeigers und folgere aus den Quaternionen, die hierdurch entſtehn wieder eben ſo andere, wie man aus den Ternionen der Ordnung des m—1ten Elements die übrigen herleitet.

5) Die Vorſchriften 3) und 4) wende man mit gehöriger Veränderung wieder an um aus den gefundenen Quaternionen, Quinionen zu folgern und wiederhole überhaupt dieſe Operation ſo lange bis man alle durch ſie zu findende M—1tionen bekommen und aus dieſen die Mtionen hergeleitet hat.

Beweis.

1) Es iſt klar, daſs alle erhaltene Mtionen einerlei Summe haben, weil den conſtruirten Binionen einerlei Summe zukömmt, und daher auch den hieraus abgeleiteten Ternionen u. ſ. f.; hat alſo die erſte Mtion die verlangte Summe ν, ſo haben auch die übrigen Mtionen dieſe Summe. Daſs aber die erſte Mtion die Summe ν hat, erhellet ſo: Das vorletzte Element des Zeigers hat die Summe $\nu-1$, das nach der Linken hin auf dieſes folgende beſitzt die Summe $\nu-2$, das dieſem folgende Element des Zeigers, hat die Summe $\nu-3$ u. ſ. w. ſo daſs alſo das Element, welches von dem vorletzten des Zeigers nach der Linken gezählt das $\frac{m.m-1}{2}$te iſt, gleich $\nu-\frac{m.m-1}{2}$ ſeyn muſs. Dieſes Element macht aber,

der

der Auflöfung gemäfs, mit den m—1 Elementen 1, 2, 3, 4 . . . m—1 die erfte Mtion aus, folglich mufs auch, da $1+2+3+4+..+m-1 = \frac{m.m-1}{2}$ ift, die erfte Mtion die Summe $\nu - \frac{m.m-1}{2} + \frac{m.m-1}{2} = \nu$ haben.

2) Die erfte Bimion welche die Auflöfung giebt fängt fich mit dem m—1ten Elemente des Zeigers an und hat deswegen die Summe $m-1 + \nu - \frac{m.m-1}{2} = \nu - \frac{m.m-1}{2} + m-1 = \nu - (\frac{m.m-1}{2} - (m-1))$ $= \nu - (\frac{m.(m-1)-2(m-1)}{2}) = \nu - \frac{(m-2)\,m-1.}{2}$

Da dies der Fall ift, fo mufs auch die Auflöfung alle gefuchte Mtionen geben.

Es läfst fich nämlich eine jede der gefuchten Mtionen wenn fie fich nicht mit a anfängt dadurch, dafs man fucceffiv für ihr erftes Element das nächftvorhergehende und für ihr letztes das nächftfolgende des Zeigers fubftituirt auf eine gutgeordnete Mtion zur Summe ν ohne Wiederholungen reduciren, deren Anfangselement das erfte des Zeigers, alfo *a* ift. Nimmt man einer folchen das erfte Element, fo bekömmt man eine M—1tion zur Summe $\nu-1$ die fich entweder mit *b* oder einem höhern Elemente des Zeigers anfängt, aus welcher die Auflöfung gedachte Mtion der Ordnung a und daher auch mittelbar die Ntion ableitet, welche fich auf diefe Mtion der Ordnung *a* auf angegebene Weife reduciren läfst. Ift das Anfangselement genannter M—1tion ein höheres als b, fo läfst fie fich auf eine M—1tion zur Summe $\nu-1$ mit dem Anfangselemente *b* zurückführen, wenn man wieder mit ihrem erften und letzten Elemente die Subftitution vornimmt durch welche eine jede Mtion zur Summe ν, wenn

wenn sie sich nicht mit a anfängt auf eine solche zurückgeführt wird. Es setzt also der Mangel irgend einer Mtion den einer M—1tion zur Summe ν—1 mit dem Anfangselemente b voraus. Wird dieser M—1tion das Element b genommen, so bekömmt man eine M—2tion zur Summe ν— (1+2) die entweder c oder ein höheres Element des Zeigers zum Anfangselemente hat, aus welcher man also durch ein Vorsetzen des b die fehlende M—1tion der Ordnung b bekäme. Hat die M—2tion ein höheres Element als c ist zum Anfangselemente, so kann man sie wieder durch eine fortgesetzte Verwandlung ihres ersten Elements in das nächstvorhergehende und ihres letzten Elements in das nächstfolgende des Zeigers auf eine M—2tion der nämlichen Summe mit dem Anfangselemente c reduciren. Das Fehlen einer M—2tion und daher auch der Mangel einer Mtion bedingt also, dass man durch die Auflösung eine gewisse M—2tion zur Summe ν— (1+2) mit dem Anfangselemente c nicht erhält. Hieraus erhellet schon dass durch Fortsetzen dieses Raisonnement sich zeigen lässt, dass die Auflösung nur dann eine verlangte Mtion nicht giebt wenn man durch sie eine gutgeordnete M—2tion ohne Wiederholungen zur Summe ν—(1+2+3+..m—2) die sich mit dem m—1ten Elemente des Zeigers anfängt d. h. eine Combinationsbinion ohne Wiederholungen zur Summe $\nu - \frac{(m-2)(m-1)}{2}$ mit dem genannten Anfangselemente nicht bekömmt. Da man nun diese aber gewiss nicht übergeht, so ist auch einleuchtend, dass die Auflösung alle verlangte Mtionen geben muss.

Beiſpiele.

(1, 2, 3, 4, 5 ... 10, 11, 12 .. 22)
(a, b, c, d, e ... k, l m .. w)

	1	2	3	4	12	a	b	c	d	m	
	1	2	3	5	11	a	b	c	e	l	
	1	2	3	6	10	a	b	c	f	k	
	1	2	3	7	9	a	b	c	g	i	
22E	1	2	4	5	10	a	b	d	e	k	22E
	1	2	4	6	9	a	b	d	f	i	
	1	2	4	7	8	a	b	d	g	h	
	1	2	5	6	8	a	b	e	f	h	
	1	3	4	5	9	a	c	d	e	i	
	1	3	4	6	8	a	c	d	f	h	
	1	3	5	6	7	a	c	e	f	g	
	2	3	4	5	8	b	c	d	e	h	
	2	3	4	6	7	b	c	d	f	g	

Anmerkung.

Aus der Methode der Auflöſung, das Verlangte darzuſtellen, erhellet daſs ſie involutoriſch iſt. Sie giebt aber, wie man ſchon aus den beiden Beiſpielen ſieht, keine vollſtändige Involutionen.

§. 37.

Anmerkung.

Die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholungen zu beſtimmten Summen läſst ſich für jede einzelne Klaſſe alſo auch für alle Klaſſen insgeſammt, durch die in §. 33. angeführte Tabelle leicht berechnen.

ε. Von dem Combiniren mehrerer Reihen.

§. 38.

Erklärung.

Das Combiniren mehrerer Reihen beſteht darinn, daſs man mehrere in Rückſicht auf ihre Glieder ver-

verſchiedene Elementenreihen auf eine und dieſelbe Zahlenreihe bezieht, wie bisher die Reihe a, b, c, d . . . auf die Zahlenreihe 1, 2, 3, 4 . . . bezogen iſt und daſs man, anſtatt die Combinationen, welche eine gewiſſe Aufgabe verlangt, bloſs aus den Elementen einer und derſelben Reihe zu bilden, die Unionen aus der erſten Reihe hebt; die Elemente welche dieſen vorgeſetzt werden, um die Binionen zu bekommen, aus der zweiten Reihe; die Elemente welche dieſen vorgeſchrieben werden um die Ternionen zu erhalten aus der dritten Reihe nimmt u. ſ. w. und zwar ſo, daſs man jedesmal das Element einer Reihe zum Vorſetzen gebraucht, deſſen Zeigerzahl mit derjenigen des Elements der erſten Reihe übereinſtimmt, welches man würde dazu genommen haben, wenn die Combinationen bloſs aus den Elementen dieſer erſten Reihe hätten gebildet werden ſollen.

Zuſatz.

Es finden bei dem Combiniren mehrerer Reihen alle Aufgaben ſtatt, welche für das Combiniren der Elemente einer einzigen Reihe gelten und man weiſs für eine Aufgabe die Combinationen mehrerer Reihen zu finden, ſo bald man dieſe für eine einzige Reihe zu finden weiſs.

Anmerkung.

Es bedürfen alſo die Aufgaben für das Combiniren mehrerer Reihen keiner eigenen Auflöſung, ſondern es kommen ihnen die nämlichen zu, welche für die Aufgaben in Rückſicht auf eine und dieſelbe Elementenreihe gegeben ſind, nur mit dem Unterſchiede, daſs man bei mehreren Reihen, die Elemente, welche zum Vorſetzen gebraucht werden, aus der zweiten, dritten Reihe u. ſ. w. nehmen muſs, wie in der Erklärung beſtimmt iſt. Aus dieſem Grunde ſollen für die Combinationen mehrerer Reihen die Aufgaben zwar aufgeſtellt aber ſtatt der Auf-

lösung soll nur die Darstellung hingesetzt werden, die man durch die Auflösung erhalten würde.

1. *Willkührlicher Satz.*

Die einzelnen Elemente jeder Reihe bezeichnet man wie gewöhnlich mit Buchstaben, wie diese im Alphabethe auf einander folgen, bedient sich aber hierzu für eine jede Reihe eines eigenen Alphabeths. Zur Bezeichnung ganzer Reihen gebraucht man die einzelnen Buchstaben, p, q, r, s, u. s. f.; π, ϱ, σ u. s. w. Dies giebt die Zeiger:

$$\left\{\begin{matrix} 1, 2, 3, 4 \ldots \\ a, b, c, d \ldots = p \\ A, B, C, D \ldots = q \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} 1, 2, 3, 4 \ldots \\ a, b, c, d \ldots = p \\ A, B, C, D \ldots = q \\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots = r \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} 1, 2, 3, 4 \ldots \\ a, b, c, d \ldots = p \\ A, B, C, D \ldots = q \\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots = r \\ \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots = s \end{matrix}\right\}$$

u. s. w.

2. *Willkührlicher Satz.*

Die Zeichen für die Combinationsklassen mehrerer Reihen sind die gewöhnlichen, nur dass man noch die Zeichen der Reihen, worauf sich die Klassen beziehn in der Ordnung darüber schreibt, dass r vor q, q vor p gesetzt wird u. s. w. wenn in den Species der Klassen die Elemente der Reihe r vor den Elementen der Reihe q

stehn u. s. w. z. B. $\overset{q}{A}$, $\overset{qp}{B}$, $\overset{rqp}{C}$, u. s. f.

Combinationen überhaupt.

§. 39.

Aufgabe.

Es werden für den hierunter befindlichen Zeiger die Combinationen mit Wiederholungen verlangt.

$$\left\{\begin{matrix} 1, 2, 3, 4 \ldots \\ a, b, c, d = p \\ A, B, C, D = q \\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} = r \\ \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} = s \\ \ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right\}$$

Auf-

Auflösungen.

1)

a	b	c	d	
Aa	Ab	Ac	Ad	p A
	Bb	Bc	Bd	qp
		Cc	Cd	B
			Dd	
aAa	aAb	aAc	aAd	
	aBb	aBc	aBd	
		aCc	aCd	rqp
			aDd	C
	bBb	bBc	bBd	
		bCc	bCd	
			bDd	
		cCc	cCd	
			cDd	
			dDd	
𝔄aAa	𝔄aAb	𝔄aAc	𝔄aAd	
	𝔄aBb	𝔄aBc	𝔄aBd	srqp
		𝔄aCc	𝔄aCd	D
			𝔄aDd	
	𝔄bBb	𝔄bBc	𝔄bBd	
		𝔄bCc	𝔄bCd	
			𝔄bDd	

u. s. w.

vide pag. 55.

2)

𝔄	a	A	a	
𝔄	a	A	b	
𝔄	a	A	c	p
𝔄	a	A	d	A
𝔄	a	B	b	
𝔄	a	B	c	
𝔄	a	B	d	
𝔄	a	C	c	
𝔄	a	C	d	qp
𝔄	a	D	d	B
𝔄	b	B	b	
𝔄	b	B	c	
𝔄	b	B	d	
𝔄	b	C	c	
𝔄	b	C	d	
𝔄	b	D	d	
𝔄	c	C	c	
𝔄	c	C	d	
𝔄	c	D	d	rqp
𝔄	b	D	d	C
𝔅	b	B	b	

u. s. w.

vide pag. 60.

2. *Aufgabe.*

Es sollen für den Zeiger der ersten Aufgabe die Combinationen ohne Wiederholungen angegeben werden.

Auflösungen.

1)

a	b	c	d	
	Ab	Ac	Ad	p A
		Bc	Bd	qp
			Cd	B
	aBc		aBd	rqp
			aCd	C
			bCd	
	𝔄bCd			srqp D

pag. 73.

2)

				p A
				qp B
		A	a	
		A	b	
		A	c	rqp
		A	d	C
	a	B	c	
	a	B	d	
	a	C	d	srqp
𝔄	b	C	d	D

pag. 76.

3. *Aufgabe.*

Es soll für den hierunter stehenden Zeiger die fünfte Klasse der Combinationen ohne Wiederholungen dargestellt werden.

$$\left[\begin{array}{l} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\ a, b, c, d, e, f, g = p \\ A, B, C, D, E, F, G = q \\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g} = r \\ \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G} = s \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta = \pi \end{array}\right]$$

Auflösungen.

1)

πsrqp F

α B c D e
α B c D f
α B c D g
α B c E f
α B c E g
α B c F g
α B d E f
α B d E g
α B d F g
α B e F g
α C d E f
α C d E g
α C d F g
α C e F g
α D e F g
β C d E f
β C d E g
β C d F g
β C e F g
β D e F g
γ D e F g

pag. 82.

2)

πsrqp F

α	B	c	D	e
α	B	c	D	f
α	B	c	D	g
α	B	c	E	f
α	B	c	E	g
α	B	c	F	g
α	B	d	E	f
α	B	d	E	g
α	B	d	F	g
α	B	e	F	g
α	C	d	E	f
α	C	d	E	g
α	C	d	F	g
α	C	e	F	g
α	D	e	F	g
β	C	d	E	f
β	C	d	E	g
β	C	d	F	g
β	C	e	F	g
β	D	e	F	g
γ	D	e	F	g

pag. 84.

Com-

Combinationen zu bestimmten Summen.

§. 40.

1. *Aufgabe.*

Es wird die Entwickelung der Combinationen mit Wiederholungen zur Summe 5, für hierunter befindlichen Zeiger verlangt.

$$\left\{\begin{array}{l} 1, 2, 3, 4, 5 \\ a, b, c, d, e = p \\ A, B, C, D, E = q \\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e} = r \\ \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E} = s \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon = t \end{array}\right\}$$

Auflösungen.

1)

$$\begin{array}{l} e\ {}^{5}\mathrm{A}^{p} \\ \hline Ad\ \ qp \\ Bc\ {}^{5}\mathrm{B} \\ \hline \mathfrak{a}Ac\ \ rqp \\ \mathfrak{a}Bb\ {}^{5}\mathrm{C} \\ \hline \mathfrak{A}\mathfrak{a}Ab\ {}^{5}\mathrm{D}^{srqp} \\ \hline \alpha\mathfrak{A}\mathfrak{a}Aa\ \ tsrqp \\ {}^{5}\mathrm{E} \end{array}$$

pag. 87.

2)

$$\left|\begin{array}{llll} \alpha & \mathfrak{A} & \mathfrak{a} & A \\ \mathfrak{A} & \mathfrak{a} & A & \overline{b} \\ \mathfrak{a} & A & \overline{c} & \\ \mathfrak{a} & B & \overline{b} & \\ A & \overline{d} & & \end{array}\right| \begin{array}{l} a \\ \hline \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

(B c
(C

pag. 93.

Anmerkung.

Bei der zweiten Darstellung ist für das Vorschreiben des ersten Elements, um aus den Complexionen zur nächstvorhergehenden Summe, die Complexionen der Ordnung des ersten Elements des Zeigers zur nächstfolgenden gröfsern Summe zu erhalten, diese Vorschrift zu beobachten, dafs man jedesmal das erste Ele-

ment derjenigen Reihe dazu nehmen muſs, welche im Zeiger zunächſt auf die folgt, zu welcher das erſte Element der Complexion gehört, vor die das erſte Element des Zeigers geſetzt werden ſoll.

2. *Aufgabe.*

Die dritte Klaſſe der Combinationen mit Wiederholungen zur Summe 12, darzuſtellen.

Zeiger.

1, 2, 5, 4, 5, 6, 7, 8, 9 . .	
a, b, c, d, e, f, g, h, i . .	= p
A, B, C, D, E, F, G, H, I . .	= q
a, b, c, d, e, f, g, h, i , .	= r
𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, 𝔈, 𝔉, 𝔊, ℌ, ℑ . .	= s

Auflöſung.

𝔄	a	A	i
𝔄	a	B	h
𝔄	a	C	g
𝔄	a	D	f
𝔄	a	E	e
𝔄	b	B	g
𝔄	b	C	f
𝔄	b	D	e
𝔄	c	C	e
𝔄	c	D	d
𝔅	b	B	f
𝔅	b	C	e
𝔅	b	D	d
𝔅	c	C	d
ℭ	c	C	c

$^{srqp}_{12}D$

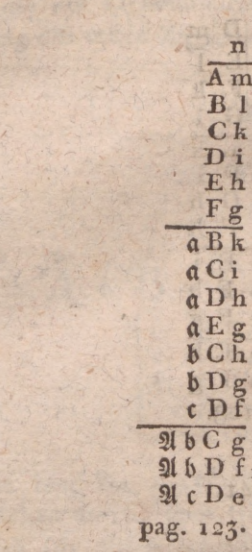
pag. 109.

3. *Aufgabe.*

Für den Zeiger der zweiten Aufgabe die Combinationen ohne Wiederholungen zur Summe 13, zu entwickeln.

Auf-

Auflöſung.



pag. 123.

4. *Aufgabe.*

Es ſoll die fünfte Klaſſe der Combinationen ohne Wiederholungen zur Summe 22, dargeſtellt werden.

Zeiger.

1,	2,	3,	4,	5 . . .	10,	11,	12 . .	22				
a,	b,	c,	d,	e . . .	k,	l,	m . .	w	=	p		
A,	B,	C,	D,	E . . .	K,	L,	M . .	W	=	q		
a,	b,	c,	d,	e . . .	f,	l,	m . .	w	=	r		
𝔄,	𝔅,	ℭ,	𝔇,	𝔈 . . .	𝔎,	𝔏,	𝔐 . .	𝔚	=	s		
α,	β,	γ,	δ,	ε . . .	κ,	λ,	μ . .	χ	=	π		

Auflösung.

α	B	c	D	m
α	B	c	E	l
α	B	c	F	k
α	B	c	G	i
α	B	d	E	k
α	B	d	F	i
α	B	d	G	h
α	B	e	F	h
α	C	d	E	i
α	C	d	F	h
α	C	e	F	g
β	C	d	E	h
β	C	d	F	g

$^{\pi srqp}_{22}D$

pag. 128.

§. 41.

Anmerkung.

Bei dem Combiniren mehrerer verschiedenen Reihen, kann keine Combination ein Element einer und derselben Reihe öfter als *einmal* enthalten, folglich fällt hier auch die Anwendung des Wiederholungsexponenten weg, und daher kann es hier auch keine Gleichungen geben, welche mit denjenigen für das Combiniren der Elemente *einer* Reihe correspondirten, in welchen die Wiederholungsexponenten vorkommen. Hingegen alle übrige durch Klassen ausgedrückte Gleichungen, welche die Combinationen der Elemente *einer* Reihe geben, gelten mit gehörigen Veränderungen auch für die Combinationen mehrerer unter sich verschiedener Elementenreihen.

Z. B.

Z. B. für den hierunter befindlichen Zeiger in welcher π die $n$te Elementenreihe seyn mag, wird aus der Gleichung des ersten Zusatzes in §. 24., diese:

$$\left\{\begin{array}{l} 1, 2, 3, 4 \ldots \\ a, b, c, d \ldots = p \\ A, B, C, D \ldots = q \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots = r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots = \pi \end{array}\right\}$$

$$'J^{\pi \ldots rqp} = 'A^{p} + 'B^{qp} + 'C^{rqp} + 'D^{srqp} + \ldots\ldots + 'J\!N^{\pi \ldots rqp}.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1, 2, 3, 4 \ldots \\ a, b, c, d \ldots = p \\ A, B, C, D \ldots = q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots = \pi \end{array}\right\}$$

Das hier im allgemeinen gesagte wird es unnöthig machen die übrigen Gleichungen aufzustellen, welche noch für die Combinationen mehrerer Reihen statt finden.

5. Von den Variationen.

§. 42.

1. *Erklärung.*

Das Variiren wird eingetheilt in Variiren überhaupt und Variren zu bestimmten Summen.

2. *Erklärung.*

Variiren überhaupt heifst alle mögliche gutgeordnete und schlechtgeordnete Complexionen darstellen, welche für gewifse gegebene Elemente statt finden. Eine jede dieser Complexionen wird eine Variation genannt und der Inbegriff aller Variationen, die zu einer und derselben Klasse gehören macht eine Variationsklasse aus.

Das Zeichen des Variirens überhaupt für den Zeiger $\binom{1, 2, 3\ldots}{a, b, c\ldots}$ iſt: Vr $\binom{1, 2, 3\ldots}{a, b, c\ldots}$ Spl. wo Vr, Variatio und Spl. wieder ſimplex bedeutet. (§. 23. 2. Erkl.)

Zuſatz.

Die Combinationen mehrerer gegebener Elemente machen mit ihren Verſetzungen alle Variationen dieſer Elemente aus. (§. 23, 2. Erkl. Anmerk.)

3. *Erklärung.*

Wird beim Vaiiren mehrerer Elemente ſo verfahren, als ſey ein jedes derſelben mehreremal, und wofern nichts darüber feſtgeſetzt iſt, unendliche mal gegeben, ſo variirt man mit Wiederholungen.

Das hierhergehörige Zeichen iſt für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4\ldots}{a, b, c, d\ldots}$ dieſes: Vr, $\binom{1, 2, 3, 4\ldots}{a, b, c, d\ldots}$ Spl. a. r.

Bedient man ſich beim Variiren der eben gedachten Wiederholungen nicht, ſo variirt man ohne Wiederholungen.

Das Zeichen hierfür iſt für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4\ldots}{a, b, c, d\ldots}$ dieſes: Vr $\binom{1, 2, 3, 4\ldots}{a, b, c, d\ldots}$ Spl. o. r.

Man vergleiche hiermit pag. 52, 4. Erkl.

4. *Erklärung.*

Variiren zu einer beſtimmten Summe, heiſst für einen gegebenen Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4\ldots}{a, b, c, d\ldots}$ nicht alle ſondern nur die Variationen darſtellen, deren Elementenſumme eine gewiſse beſtimmte iſt.

Die

Die Zeichen hierfür sind:

Vr. $\binom{1,2,3\cdots}{a,b,c\cdots}$ num. n, a, r und Vr. $\binom{1,2,3\cdots}{a,b,c\cdots}$ num. n, o. r.

Man vergleiche hiermit pag. 52, 5. Erkl.

5. *Erklärung.*

Die einzelnen Variationscomplexionen zur Summe n, werden Variationszerfällungen der Zahl n genannt.

Willkührlicher Satz.

Die Zeichen für die Variationsklassen und Involutionen, sind die nämlichen deren man sich hierfür bei den Combinationen bedient, nur mit dem Unterschiede, dass man beim Variiren nicht dazu die gradestehende, sondern die schiefstehende Schrift gebraucht. So z. B. Bezeichnet man die erste, zweite, dritte Klasse der Variationen überhaupt mit Wiederholungen, mit

$'A, 'B, 'C.$

6. *Erklärung.*

Zum Variiren ist entweder nur *eine* Elementenreihe oder es sind mehrere dergleichen gegeben, die aber in Rücksicht auf ihre Elemente unter sich verschieden sind.

Anmerkung.

Es bezieht sich das bis jetzt vom Variiren gesagte zunächst auf das Variiren der Elemente *einer* Reihe, daher auch dieses zuerst abgehandelt und das Variiren *mehrerer* Reihen unter der Überschrift *von dem Variiren mehrerer Reihen* zuletzt besonders vorgetragen wird.

α) Von dem Variiren überhaupt mit Wiederholungen.

§. 43.

Aufgabe.

Für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4\ldots}{a, b, c, d\ldots}$ alle Variationen mit zugelaſſenen Wiederholungen zu finden.

1)

Arithmetiſch-combinatoriſche Auflöſung.

1) Man ſchreibe die Unionen 1, 2, 3, 4... in der Ordnung neben einander, wie ſie im Zeiger geordnet ſind, ſo hat man die erſte Klaſſe $('A)$ der Zahlenvariationen.

2) Aus $'A$ leite man $'B$, aus $'B$ wieder $'C$, aus $'C$ wieder $'D$ u. ſ. w. ab, wie in §. 7. aus den einzifrigen Zahlen die zweizifrigen aus dieſen die dreizifrigen hergeleitet werden u. ſ. w. und ſchreibe hierbei die zweite Klaſſe unter die erſte, die dritte unter die zweite u. ſ. f.

Die Subſtitution der Buchſtaben, für die mit ihnen correſpondirenden Elemente der gefundenen Zahlenvariationen, giebt die verlangten Buchſtaben-variationen.

Beweis.

Eine jede Variation der Zahlenelemente des Zeigers kann als eine Zahl angeſehen werden, folglich erhält man durch die gegebenen Vorſchriften gewiſs alle Zahlen-variationen, weil ſie alle mögliche Zahlen giebt, die ſich mit den gegebenen Zahlenelementen bei zugelaſſenen Wiederholungen ſchreiben laſſen und daher muſs auch die angegebene Subſtitution der Buchſtaben, alle Buchſtabenvariationen geben, weil eine jede derſelben mit einer Zahlenvariation correſpondirt.

Bei-

Beiſpiele.

$\binom{1, 2, 3, 4}{a, b, c, d}$

'A	1	2	3	4	a	b	c	d	'A
	11	12	13	14	aa	ab	ac	ad	
'B	21	22	23	24	ba	bb	bc	bd	'B
	31	32	33	34	ca	cb	cc	cd	
	41	42	43	44	da	db	dc	dd	
	111	112	113	114	aaa	aab	aac	aad	
	121	122	123	124	aba	abb	abc	abd	
	131	132	133	134	aca	acb	acc	acd	
	141	142	143	144	ada	adb	adc	add	
	211	212	213	214	baa	bab	bac	bad	
'C	"	"	"	"	"	"	"	"	'C
	241	242	243	244	bda	bdb	bdc	bdd	
	311	312	313	314	caa	cab	cac	cad	
	"	"	"	"	"	"	"	"	
	341	342	343	344	cda	cdb	cdc	cdd	
	411	412	413	414	daa	dab	dac	dad	
	"	"	"	"	"	"	"	"	
	441	442	443	444	dda	ddb	ddc	ddd	
	1111	1112	1113	1114	aaaa	aaab	aaac	aaad	
	"	"	"	"	"	"	"	"	
	1441	1442	1443	1444	adda	addb	addc	addd	
	2111	2112	2113	2114	baaa	baab	baac	baad	
	"	"	"	"	"	"	"	"	
'D	2441	2442	2443	2444	bdda	bddb	bddc	bddd	'D
	3111	3112	3113	3114	caaa	caab	caac	caad	
	"	"	"	"	"	"	"	"	
	3441	3442	3443	3444	cdda	cddb	cddc	cddd	
	4111	4112	4113	4114	daaa	daab	daac	daad	
	"	"	"	"	"	"	"	"	
	4441	4442	4443	4444	ddda	dddb	dddc	dddd	
	u.	f.	w.		u.	f.	w.		

2.

α) *Rein combinatoriſche Auflöſung.*

1) Man ſchreibe die Elemente a, b, c, d, e . . . x, als Unionen in der Ordnung wie ſie jetzt genannt ſind neben einander, ſo hat man 'A

2)

2) Einer jeden Complexion der $'A$ ſetze man erſt a vor, ſo hat man die Binionen der Ordnung a; hierauf ſchreibe man vor jede Complexion der $'A$ das Element b, ſo bekömmt man die Binionen der Ordnung b; eben ſo ſuche man die Binionen der Ordnung c, der Ordnung d u. ſ. f. der Ordnung jedes der übrigen Elemente des Zeigers. Iſt dieſes geſchehn ſo hat man $'B$.

3) Auf die nämliche Weiſe, wie man $'B$ aus $'A$ erhält, leite man aus $'B$ wieder $'C$, aus $'C$ wieder $'D$, aus $'D$ wieder $'E$ her u. ſ. f.

Beweis.

Es iſt nicht möglich, daſs hier irgend eine gutgeordnete oder ſchlechtgeordnete Complexion übergangen werden kann, die ſich aus den Elementen a, b, c, d u. ſ. w. machen läſst, weil dies den Mangel einer der zuerſt hingeſchriebenen Unionen vorausſetzen würde. Denn geſetzt man erhielte durch die gegebenen Vorſchriften die Complexion aacbd nicht, ſo müſste man durch ſie auch nicht acbd, ferner cbd, bd und ſo auch d nicht erhalten.

Die zur erſten Auflöſung gegebenen Beiſpiele gehören auch hierher.

Anmerkung.

In den gegebenen beiden Beiſpielen laſſen ſich zwar die erſte und zweite Klaſſe der drei Elemente a, b, c, der zwei Elemente b und c und des einen Elements c aus der erſten und zweiten Klaſſe der Elemente a, b, c, und d leicht durch ein Linienziehn herausheben, für die übrigen Klaſſen iſt dies aber nicht der Fall. Es giebt alſo hier für die Variationen keine ſolche Involution, wie die zweite

zweite Auflösung der Aufgabe des §. 24 für die Combinationen darstellt.

3.

β) *Rein combinatorische Auflösung.*

1) Man setze die gegebenen Elemente a, b, c, d u. s. w. in der Ordnung wie sie jetzt genannt sind unter einander, so hat man $'A$.

2) Sämmtlichen Unionen schreibe man a vor; dies giebt die Binionen der Ordnung b. Das erste Element jeder dieser Binionen verwandele man in das nächstfolgende des Zeigers, so erhält man die Binionen der Ordnung c. Auf dieselbe Weise folgere man hieraus die der Ordnung d, aus diesen wieder die der Ordnung e und setze dieses so lange fort, bis man alle Binionen der Ordnung des letzten Elements des Zeigers erhalten hat, welche nach dieser Vorschrift gefunden werden können. Sämmtliche gefundene Binionen machen $'B$ aus.

3) Auf die nämliche Weise wie man $'B$ aus $'A$ abgeleitet hat, leite man wieder $'C$ aus $'B$, $'D$ aus $'C$ her u. s. f.

Beweis.

Eine Vergleichung dieser zweiten rein combinatorischen Auflösung mit der ersten zeigt sogleich, dass beide nur einerlei Complexionen geben können, und dass daher die zweite Auflösung richtig ist, sobald es die erste ist.

Beispiele.

a)

	a	a	a	a	
	a	a	a	b	
	a	a	a	c	
	a	a	a	d	A
	a	a	b	a	
	a	a	b	b	
u.	a	a	b	c	
	a	a	b	d	
	a	a	c	a	
	a	a	c	b	
	a	a	c	c	
	a	a	c	d	
	a	a	d	a	
f.	a	a	d	b	
	a	a	d	c	
	a	a	d	d	B
	a	b	a	a	
	"	"	"	"	
	a	b	d	d	
	a	c	a	a	
w.	"	"	"	"	
	a	c	d	d	
	a	d	a	a	
	"	"	"	"	
	a	d	d	d	C
	b	a	a	a	

(1 2 3 4 / a b c d)

u. f. w.

b)

	1	1	1	1	
	1	1	1	2	
	1	1	1	3	
	1	1	1	4	A
	1	1	2	1	
	1	1	2	2	
u.	1	1	2	3	
	1	1	2	4	
	1	1	3	1	
	1	1	3	2	
	1	1	3	3	
	1	1	3	4	
	1	1	4	1	
f.	1	1	4	2	
	1	1	4	3	
	1	1	4	4	B
	1	2	1	1	
	"	"	"	"	
	1	2	4	4	
	1	3	1	1	
w.	"	"	"	"	
	1	3	4	4	
	1	4	1	1	
	"	"	"	"	
	1	4	4	4	C
	2	1	1	1	

u. f. w.

(0, 1 / a, b)

$\binom{0, 1}{a, b}$

3)

	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	1
	0	0	0	1	0	2
	0	0	0	1	1	3
u.	0	0	1	0	0	4
	0	0	1	0	1	5
	0	0	1	1	0	6
	0	0	1	1	1	7
	0	1	0	0	0	8
	0	1	0	0	1	9
	0	1	0	1	0	10
f.	0	1	0	1	1	11
	0	1	1	0	0	12
	0	1	1	0	1	13
	0	1	1	1	0	14
	0	1	1	1	1	15
	1	0	0	0	0	16
	1	0	0	0	1	17
w.	1	0	0	1	0	18
	1	0	0	1	1	19
	1	0	1	0	0	20
	1	0	1	0	1	21
	1	0	1	1	0	22
	1	0	1	1	1	23
	1	1	0	0	0	24
	1	1	0	0	1	25

u. f. w.

$\binom{0, 1, 2}{a, b, c}$

4)

	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	1
	0	0	0	2	2
	0	0	1	0	3
	0	0	1	1	4
u.	0	0	1	2	5
	0	0	2	0	6
	0	0	2	1	7
	0	0	2	2	8
	0	1	0	0	9
	0	1	0	1	10
f.	0	1	0	2	11
	0	1	1	0	12
	0	1	1	1	13
	0	1	1	2	14
	0	1	2	0	15
	0	1	2	1	16
	0	1	2	2	17
w.	0	2	0	0	18
	0	2	0	1	19
	0	2	0	2	20
	0	2	1	0	21
	0	2	1	1	22
	0	2	1	2	23
	0	2	2	0	24
	0	2	2	1	25
	0	2	2	2	26
	1	0	0	0	27
	1	0	0	1	28

u. f. w.

$\binom{0, 1, 2, 3}{a, b, c, d}$

5)

	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	1
	0	0	0	2	2
	0	0	0	3	3
	0	0	1	0	4
u.	0	0	1	1	5
	0	0	1	2	6
	0	0	1	3	7
	0	0	2	0	8
	0	0	2	1	9
	0	0	2	2	10
	0	0	2	3	11
f.	0	0	3	0	12
	0	0	3	1	13
	0	0	3	2	14
	0	0	3	3	15
	0	1	0	0	16
	//	//	//	//	//
w.	0	1	3	3	31
	0	2	0	0	32
	//	//	//	//	//
	0	2	3	3	47
	0	3	0	0	48
	//	//	//	//	//
	0	3	3	3	63
	1	0	0	0	64

u. f. w.

1. *Anmerkung.*

Beide Auflösungen geben die Variationen so, dafs diese als Zahlen betrachtet wachsend fortlaufen und als Wörter eines Lexicons, lexicographisch fortgehn.

2. *Anmerkung.*

Wenn man das Gesetz kennen lernen will, nach welchen die Zahlen eines Zahlensystems fortlaufen, so hat man nur nöthig die Variationen der Grundzeichen desselben mit Wiederholungen aufzusuchen und zwar in der Ordnung, dafs man hierbei successiv von der kleinsten Zahl zu den gröfsern übergeht. Dies ist der Fall wenn man die Variationen der Grundzeichen nach einer der beiden gegebenen Auflösungen (1 *Anmerk.*) aufsucht, daher stellt das dritte Beispiel das Gesetz für das dyadische Zahlensystem, das vierte Beispiel das Gesetz für das triadische und das fünfte Beispiel das Gesetz für das tetradische Zahlensystem vor Augen. *a*).

Die Zahlen welche bei diesen drei Beispielen rechter Hand neben dem Doppelstriche stehn, sind die Zahlen des decadischen Systems, mit welchen die daneben liegenden Zahlen des dargestellten Systems correspondiren.

3. *Anmerkung.*

Die nämliche Anmerkung welche pag. 60 und 61 in Rücksicht auf die beiden rein combinatorischen Auflösungen der Aufgabe, alle Combinationen mit Wiederholungen zu finden, gegeben ist, gilt auch für die beiden rein combinatorischen Auflösungen, die für die Bestimmung der Variationen gegeben sind, wenn man in der genannten

a) Das dritte Beispiel nämlich, giebt die Variationen der Grundzeichen 0, 1; das vierte Beispiel die Variationen der Grundzeichen 0, 1, 2; das fünfte Beispiel die Variationen der Grundzeichen 0, 1, 2, 3.

ten Anmerkung die Behauptung übergeht dafs die erſte Auflöſung eine vollſtändige Involution in Rückſicht auf die Anzahl der Elemente giebt.

4. *Anmerkung.*

Die Involution, welche die zweite rein combinatoriſche Auflöſung giebt, läſst nicht ſolche Umwandelungen ihrer Form zu, wie im zweiten Zuſatze des §. 24 mit der Involution der Combinationen vorgenommen ſind. Für die Variationen giebt es daher auch nicht ſolche Gleichungen als im zweiten, dritten und vierten Zuſatze des §. 24 für die Combinationen aufgeſtellt ſind.

1. *Zuſatz.*

Aus der Darſtellung der zweiten rein combinatoriſche Auflöſung folgt dieſe Gleichung:

$$'J = 'A + 'B + 'C + 'D + 'E + 'F + .. + 'N.$$

2. *Zuſatz.*

Da man nach der erſten rein combinatoriſchen Auflöſung die nächſtfolgende Variationsklaſſe erhält, wenn man allen Complexionen der nächſtvorhergehenden Klaſſe ſucceſſiv das erſte, zweite, dritte Element des Zeigers u. ſ. f. vorſetzt, ſo iſt die Gleichung für die Variationen, welche mit der des fünften Zuſatzes in §. 24 cor. reſpondirt, dieſe:

$$\overset{0}{N} = {}_{(a,\,b,\,c\,..)}^{(1,\,2,\,3\,..)}\,{}_{a}{}'\overset{-1}{N} + {}_{(a,\,b,\,c\,..)}^{(1,\,2,\,3\,..)}\,{}_{b}{}'\overset{-1}{N} + {}'\overset{-1}{N} + {}_{d}{}'\overset{-1}{N} + ...$$

3. *Zuſatz.*

Es hat eine jede Variationsklaſſe ſo viele Complexionen der einzelnen Ordnungen a, b, c, d u. ſ. f. als die

die nächſtvorhergehende Klaſſe Complexionen überhaupt hat.

Hiernach läſst ſich für die Variationen eine ſolche Figur zeichnen, wie für die Combinationen im 7ten Zuſatze des §. 24 gegeben iſt. Sie iſt für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4, 5}{a, b, c, d, e}$ dieſe:

	a	b	c	d	e
$'A$	1	1	1	1	1
$'B$	5	5	5	5	5
$'C$	5^2	5^2	5^2	5^2	5^2
$'D$	5^3	5^3	5^3	5^3	5^3
$'E$	5^4	5^4	5^4	5^4	5^4
	. . . . .				

Sowohl das Geſetz nach welchen die horizontalen als auch das nach welchen die neben einander liegenden vertikalen Zahlenreihen fortlaufen liegt hier deutlich vor Augen, es macht alſo keine Schwierigkeit die Figur entweder durch ein Schreiben der vertikalen oder durch ein Schreiben der horizontalen Zahlenreihen ſo weit fortzuſetzen als man will.

Für $m+1$ Klaſſen erhält die Figur bei r verſchiedenen Elementen a, b, c, . . . v, w, x, y, z dieſe Form:

	a	b	c	d	e . . . . w
$'A$	1	1	1	1	1 1
$'B$	r	r	r	r	r . . . . r
$'C$	r^2	r^2	r^2	r^2	r^2 . . . r^2
$'D$	r^3	r^3	r^3	r^3	r^3 . . . r^3
$'E$	r^4	r^4	r^4	r^4	r^4 . . . r^4
$''$	// // // // // // // // // // // //				
$\overset{0}{M}$	r^{m-1}	r^{m-1}	r^{m-1}	r^{m-1}	r^{m-1} . . r^{m-1}
$\overset{+1}{M}$	r^m	r^m	r^m	r^m	r^m . . . r^m

§. 44.

Lehrſatz.

Die Anzahl der Complexionen der mten Variationsklaſſe mit Wiederholungen iſt für r verſchiedene Elemente, gleich r^m.

Beweis.

Die m+1te Klaſſe hat ſo viele Complexionen der Ordnung jedes einzelnen Elements des Zeigers als die mte Klaſſe Complexionen überhaupt hat, oder, welches einerlei iſt, der mten Klaſſe kommen ſo viele Complexionen zu, als die m+1te Klaſſe Complexionen von der Ordnung jedes der gegebenen Elemente beſitzt. Da nun nach der letzten Figur des §. 44, die m+1te Klaſſe von der Ordnung jedes der Elemente des Zeigers, r^m Complexionen hat, ſo muſs auch die mte Klaſſe r^m Complexionen haben,

α) Von den Variationen überhaupt ohne Wiederholungen.

§. 45.

Aufgabe.

Es werden die Variationen ohne Wiederholungen für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4 \ldots}{a, b, c, d \ldots}$ gesucht.

1.

β) *Rein combinatorische Auflösung.*

Man beobachte im Ganzen die Vorschriften der ersten rein combinatorischen Auflösung der Aufgabe des §. 44. setze aber nicht einer jeden Complexion der vorhergehenden Klasse, des Zeigers Element p vor, um die Complexionen der Ordnung p der nächstfolgenden Klasse zu erhalten, sondern schreibe dieses Element nur vor die Complexionen in welchen es sich nicht befindet.

Beweis.

Es ist einleuchtend, dass die Auflösung nur die Variationen nicht giebt, in welchen *ein* und dasselbe Element öfter als *ein*mal vorkömmt. Die Aufgabe verlangt aber auch nur die Variationen, welche *ein* und dasselbe Element nur *ein*mal enthalten, folglich ist die Auflösung auch richtig.

Bei-

Beiſpiele.

$\binom{1, 2, 3, 4}{a, b, c, d}$

	a	b	c	d
A				
	ab	ac	ad	
B	ba	bc	bd	
	ca	cb	cd	
	da	db	dc	
	abc	abd	acb	
	acd	adb	adc	
C	bac	bad	bca	
	bcd	bda	bdc	
	cab	cad	cba	
	cbd	cda	cdb	
	dab	dac	dba	
	dbc	dca	dcb	
	abcd	abdc	acbd	
	acdb	adbc	adcb	
D	bacd	badc	bcad	
	bcda	bdac	bdca	
	cabd	cadb	cbad	
	cbda	cdab	cdba	
	dabc	dacb	dbac	
	dbca	dcab	dcba	

	1	2	3	4
A				
	12	13	14	
B	21	23	24	
	31	32	34	
	41	42	43	
	123	124	132	
	134	142	143	
C	213	214	231	
	234	241	243	
	312	314	321	
	324	341	342	
	412	413	421	
	423	431	432	
	1234	1243	1324	
	1342	1423	1432	
D	2134	2143	2314	
	2341	2413	2431	
	3124	3142	3214	
	3241	3412	3421	
	4123	4132	4213	
	4231	4312	4321	

Anmerkung.

Die Auflöſung giebt für die Variationen überhaupt ohne Wiederholungen, eine eben ſolche Darſtellung, als die erſte rein combinatoriſche Auflöſung der Aufgabe des §. 43 für die Variationen überhaupt mit Wiederholungen, giebt.

Zuſatz.

Aus der Art und Weiſe, wie die Auflöſung aus einer Klaſſe die nächſtfolgende herleitet, entſteht dieſe Gleichung:

$$\overset{0}{N}\left(\begin{smallmatrix}1,&2,&3,&4\cdots\\a,&b,&c,&d\cdots\end{smallmatrix}\right) = a\overset{-1}{N}\left(\begin{smallmatrix}2,&3,&4\cdots\\b,&c,&d\cdots\end{smallmatrix}\right) + b\overset{-1}{N}\left(\begin{smallmatrix}1,&3,&4\cdots\\a,&c,&d\cdots\end{smallmatrix}\right) + c\overset{-1}{N}\left(\begin{smallmatrix}1,&2,&4\cdots\\a,&b,&d\cdots\end{smallmatrix}\right) + \ldots.$$

* * *

Die rein combinatorische Auflösung, nach welcher die Unionen unter einander geschrieben werden, wird hier übergangen, weil die Einfachheit wodurch sich diese Auflösung sonst empfiehlt, hier wegfällt.

Darstellung einzelner Klassen der Variationen überhaupt ohne Wiederholungen *a*).

§. 46.

Aufgabe.

Für den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix}1,&2,&3,&4\cdots\\a.&b,&c,&d\ldots\end{smallmatrix}\right)$ die *m*te Klasse der Variationen überhaupt ohne Wiederholungen darzustellen.

1.

Rein combinatorische Auflösung.

1) Man schreibe die ersten *m* Elemente des Zeigers gutgeordnet neben einander. Dies giebt die erste Complexion.

2) Man verwandele das *m*te Element, also das letzte der ersten Complexion, in das nächstfolgende des Zeigers, so

a) Hierher gehört, mit gehörigen Veränderungen, die nämliche Anmerkung, welche in §. 27 für die Combinationen gegeben ist.

so erhält man die zweite Complexion. Hieraus leite man auf die nämliche Weise die dritte, aus der dritten Complexion die vierte ab u. s. f. bis man auf diese Weise weiter keine Complexion finden kann.

3) In allen gefundenen Complexionen schreibe man für das m—1te also für das vorletzte Element das nächstfolgende des Zeigers und lasse die übrigen Elemente der Complexion unverändert ausser wenn man hierbei auf eine Complexion kömmt, deren *m*tes Element das genannte des Zeigers ist, denn in diesem Falle setzt man für dieses *m*te dasjenige, welches ihm im Zeiger zunächst vorhergeht. Ist dies geschehn so leitet man aus den jetzt gefundenen Complexionen auf die nämliche Weise wieder andere ab und setzt dies überhaupt so lange fort als möglich ist.

4) In einer jedem der durch 3) erhaltenen Complexionen substituire man für das m—2te Element dasjenige des Zeigers, welches ihm hierinn zunächst folgt und verändere ausser diesem m—2ten kein anderes Element der Complexionen, ausgenommen, wenn eines von denen, die auf das genannte m—2te folgen, mit dem Substituirten einerlei ist, weil in diesem Falle dafür dieses m—2te gesetzt werden muss. Mit den hierdurch entstandenen Complexionen nehme man dann wieder die nämliche Operation vor, wie auch mit denen die man hierdurch wieder bekommen hat und fahre hiermit überhaupt so lange fort als es nur immer geschehn kann.

5) Nach der nämlichen Vorschrift welche 4) giebt, folgere man aus den Complexionen die 4) gegeben hat wieder neue her, nur mit dem Unterschiede, dass bei dieser Ableitung, für das m—3te Element die Substitution geschehen muss.

6. Hieraus erhellet schon wie weiter zu verfahren ist, und dafs die letzte Complexion eine umgekehrt gutgeordnete der letzten m Elemente des Zeigers seyn wird.

Beweis.

Dafs in keiner der gefundenen Mtionen ein Element öfter als *ein* mal vorkommen hann, fällt hinreichend in die Augen; es fragt sich aber ob nicht bei der Beobachtung der Regeln der Auflösung eine oder mehrere Complexionen übergangen werden? Diefs ist aus dem Grunde nicht möglich weil der Mangel irgend einer Mtion das Fehlen der zuerst hingeschriebenen bedingt. Denn gesetzt es wäre von der vierten Klasse für den Zeiger $\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7}{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g}$ die Rede und man wollte behaupten dafs die Auflösung nicht die Complexion *badge* gäbe, so müfste man annehmen, dafs man durch sie auch nicht die Complexionen *abdge*, *abcge*, *abcfe*, *abcef*, *abcdf* und *abcde* erhielte, weil *abcdf* nach 2) aus *abcde* entsteht, weil ferner nach 3) *abcef* aus *abcdf*, *abcfe* aus *abcef*, *abcge* aus *abcfe* entspringt, weil nach 4) *abdge* aus *abcge* und endlich weil *badge* nach 6) aus *abdge* abgeleitet wird.

Beiſpiele.

$\binom{1, 2, 3, 4, 5}{a, b, c, d, e}$

D'

abcd	bacd	cabd	dabc	eabc
abce	bace	cade	dace	eacd
abdc	badc	cadb	dacb	eacb
abde	bade	cade	dace	eacd
abec	baec	caeb	daeb	eadb
abed	baed	caed	dacc	eadc
acbd	bcad	cbad	dbac	ebac
acbe	bcae	cbae	dbae	ebad
acdb	bcda	cbda	dbca	ebca
acde	bcde	cbde	dbce	ebcd
aceb	bcea	cbea	dbea	ebda
aced	bced	cbed	dbec	ebdc
adbc	bdac	cdab	dcab	ecab
adbe	bdae	cdae	dcae	ecad
adcb	bdca	cdba	dcba	ecba
adce	bdce	cdbe	dcbe	ecbd
adeb	bdea	cdea	dcea	ecda
adec	bdec	cdeb	dceb	ecdb
aebc	beac	ceab	deab	edab
aebd	bead	cead	deac	edac
aecb	beca	ceba	deba	edba
aecd	becd	cebd	debc	edbc
aedb	beda	ceda	deca	edca
aedc	bedc	cedb	decb	edcb

2)

Rein combinatoriſche Auflöſung.

1) Man ſchreibe das *m*te und die folgenden Elemente des Zeigers unter einander.

2) Vor dieſe ſetze man das m—1te Element des Zeigers; hierauf ſubſtituire man für das erſte Element der jetzt gefundenen Binionen das nächſtfolgende und für ihr zweites, wenn es mit dem ſubſtituirten identiſch iſt,

das

das nächſtvorhergehende des Zeigers. Dies giebt Binionen der Ordnung des mten Elements des Zeigers. Aus dieſen mache man auf die nämliche Weiſe Binionen der Ordnung des m+1ten Elements, hieraus wieder die Binionen der Ordnung des m+2ten Elements und fahre ſo fort bis man die Binionen der Ordnung des letzten Elements des Zeigers hat.

3) Sämmtlichen Binionen ſchreibe man das m--2te Element des Zeigers vor, ſo erhält man Ternionen der Ordnung dieſes m—2ten Elements. Hieraus leite man die Ternionen der Ordnung des m—1ten Elements, aus dieſen wieder die Ternionen der Ordnung des mten Elements des Zeigers her u. ſ. w. und zwar nach folgender allgemeinen Vorſchrift:

Um aus den Complexionen einer gewiſſen Ordnung, die Complexionen der nächſthöhern Ordnung zu erhalten ſubſtire man für ihr erſtes Element das zunächſtfolgende des Zeigers und wenn eines ihrer übrigen Elemente das eben genannte ſubſtituirte des Zeigers ſeyn ſollte, ſo ſetze man für jenes eine Element der Complexion *dasjenige*, welches ihm im Zeiger zunächſt vorhergeht.

4) Vor alle durch 3) gefundene Ternionen ſchreibe man das m—3te Element des Zeigers und leite aus den hierdurch entſtandenen Quaternionen der Ordnung des genannten m—3ten Elements, wieder nach der allgemeinen Vorſchrift von 3), die Quaternionen der höhern Ordnungen her.

u. ſ. w.

Beweis.

Es bedarf keines Beweiſes, daſs in den Binionen, Ternionen u. ſ. w. Mtionen, welche die Auflöſung giebt keine Wiederholungen vorkommen, weil dieſes deutlich genug in die in Augen fällt; es braucht daher nur bewieſen

ſen zu werden, daſs man durch die Auflöſung auch alle Variations-mtionen ohne Wiederholungen bekömmt. Am kürzeſten läſst ſich dieſes darthun, wenn man dabei einen ſpeciellen Fall zum Grunde legt. Es ſoll daher unterſucht werden ob die Auflöſung für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4, 5}{a, b, c, d, e}$ alle Variationsquaternionen ohne Wiederholungen darſtellt.

α) Die zweite Vorſchrift giebt Binionen der Elemente c, d, e und zwar alle hier mögliche, weil ſie überhaupt bei *m* Elementen, für jede Ordnung, m—1 Binionen ohne Wiederholungen darſtellt und mehr als m—1 von jeder Ordnung nicht gedacht werden können.

β) Durch die dritte Vorſchrift der Auflöſung entſtehn für die Elemente b, c, d, e ſo viele Ternionen der Ordnung b der Ordnung c u. ſ. w. als es für die Elemente c, d, e Binionen ohne Wiederholungen giebt. Die dritte Vorſchrift giebt daher alle Variationsternionen ohne Wiederholungen für die Elemente b, c, d, e, weil es nur ſo viele dieſer Ternionen von der Ordnung b geben kann als Variationsbinionen ohne Wiederholungen für die Elemente c, d, e denkbar ſind und ſich eben ſo viele und auch nicht mehrere Ternionen der Ordnung c, der Ordnung d u. ſ. w. denken laſſen, als Ternionen der Ordnung b ſtatt finden.

γ) Durch die vierte Vorſchrift der Auflöſung werden für die Elemente a, b, c, d, e ſo viele Quaternionen von der Ordnung a, der Ordnung b u. ſ. f. gefunden als für die Elemente b, c, d, e Ternionen ohne Wiederholungen möglich ſind. Aus dieſem Grunde bekömmt man auch durch die vierte Vorſchrift alle geſuchte Quaternionen, denn hiervon kann es nur ſo viele von der Ordnung a, der Ordnung b u. ſ. f. geben als es für die Elemente b, c, d, e Ternionen ohne Wiederholungen giebt.

Beiſpiele.

$$\binom{1, 2, 3, 4, 5}{a, b, c, d, e}$$

C'

a	b	c
a	b	d
a	b	e
a	c	b
a	c	d
a	c	e
a	d	b
a	d	c
a	d	e
a	e	b
a	e	c
a	e	d
b	a	c
b	a	d
b	a	e
b	c	a
b	c	d
b	c	e
u. ſ. w.		

C'

1	2	3
1	2	4
1	2	5
1	3	2
1	3	4
1	3	5
1	4	2
1	4	3
1	4	5
1	5	2
1	5	3
1	5	4
2	1	3
2	1	4
2	1	5
2	3	1
2	3	4
2	3	5
u. ſ. w.		

Anmerkung.

Das nämliche welches in Rückſicht auf die beiden Auflöſungen der Aufgabe des §. 28 in der Anmerkung im allgemeinen geſagt iſt, gehört auch hierher.

§. 47.

Lehrſatz

Die Anzahl der Complexionen der mten Klaſſe der Variationen ohne Wiederholungen iſt für r verſchiedene Elemente gleich

$$r \cdot r-1 \cdot r-2 \cdot r-3 \ldots \left(r-(m-1)\right).$$

Beweis.

Die mte Variationsklaſſe enthält alle Combinationsmtionen nebſt allen möglichen Formen derſelben, folglich

lich muſs ſie auch ſo viele Complexionen beſitzen als die Summe aller Verſetzungszahlen der einzelnen Complexionen der mten Combinationsklaſſe ausmacht. Für eine jede Mtion in welcher keine Wiederholungen vorkommen iſt aber die Verſetzungszahl gleich $1.2.3.4...m$ (§. 16) und bei r verſchiedenen Elementen beſitzt die mte Klaſſe der Combinationen ohne Wiederholungen $\frac{r.r-1.r-2.r-3...(r-(m-1))}{1.2.3.4-----m}$ Mtionen, folglich iſt auch bei r verſchiedenen Elementen die gedachte Summe aller Variations-mtionen ohne Wiederholungen gleich $\frac{r.r-1.r-2.r-3...(r-(m-1))}{1.2.3.4---m} \times 1.2.3..m =$ $r.r-1.r-2.r-3...(r-(m-1))$.

γ. Von den Variationen zu beſtimmten Summen mit Wiederholungen.

§. 48.

Aufgabe.

Es werden für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4...\nu}{a, b, c, d...n}$ alle Variationen mit Wiederholungen zur Summe ν geſucht.

1.

Arithmetiſch-combinatoriſche Auflöſung.

1) Man ſchreibe das Element ν hin, ſo hat man $^{\nu}A$.

2) Hieraus leite man $^{\nu}B$ her, aus dieſer Klaſſe folgere man wieder $^{\nu}C$ u. ſ. w. wie nach §. 9 aus der einzifrigen Zahl ν ſucceſſiv die zweizifrigen, dreizifrigen, vierzifrigen u. ſ. w. die ν zifrigen Zahlen zur Summe ν abgeleitet werden.

Die

Die Subſtitution der Buchſtaben für die mit ihnen correſpondirenden Elemente der gefundenen Zahlencomplexionen giebt die geſuchten Buchſtabencomplexionen.

Beweis.

Durch die Vorſchrift der Auflöſung in §. 9 erhält man alle mögliche Zahlen deren Ziffernſumme gleich ν iſt. Eine jede dieſer Zahlen kann aber als eine Variation angeſehn werden und es läſst ſich keine Variation zur Summe ν denken, die ſich nicht unter dieſen Zahlen befände, alſo macht die einzifrige Zahl die Klaſſe $^{\nu}A$, die zweizifrigen machen die Klaſſe $^{\nu}B$, die dreizifrigen die Klaſſe $^{\nu}C$ aus u. ſ. w. und folglich muſs auch, da mit einer jeden Buchſtabenvariation eine Zahlenvariation correſpondirt, die gedachte Subſtitution alle Buchſtabenvariationen geben.

Beiſpiele.

$\binom{1, 2, 3, 4, 5, 6}{a, b, c, d, e, f}$

6		^6A		f	^6A
15				ae	
24	^6B			bd	^6B
33				cc	
42				db	
51				ea	
114				aad	
123	^6C			abc	^6C
132				acb	
141				ada	
213				bac	
222				bbb	
231				bca	
312				eab	
321				cba	
411				daa	
1113				aaac	
1122		^6D		aabb	^6D
1131	^{6}			aaca	
1212				abab	
1221				abba	
1311				acaa	
2112				baab	
2121				baba	
2211				bbaa	
3111				caaa	
11112				aaaab	
11121		^6E		aaaba	^6E
11211				aabaa	
12111				abaaa	
21111				baaaa	
111111		^6F		aaaaaa	^6F

2)

a) *Rein combinatoriſche Auflöſung.*

1) Man ſetze das Element » als erſte Klaſſe hin.

2) Man schreibe rechts neben das erste Element des Zeigers das vorletzte desselben; dies giebt die erste Complexion der zweiten Klasse. Aus dieser Complexion leite man die zweite Binion her indem man für ihr erstes Element das nächstfolgende und für ihr letztes das nächstvorhergehende des Zeigers substituirt und lasse nach diesem Ableitungsgesetze wieder aus der zweiten die dritte, aus der dritten die vierte Binion entstehn u. s. w. Die Binion ist die letzte deren letztes Element das erste des Zeigers ist.

3) Aus der zweiten Klasse leite man die dritte, aus der dritten die vierte Klasse u. s. f. nach folgenden allgemeinen Vorschriften ab:

α) Man setze vor alle Complexionen, welche sich nicht mit dem ersten Elemente des Zeigers endigen, dieses erste Element *a* vor und substituire für ihr Endelement das nächstvorhergehende des Zeigers, so hat man die Complexionen der Ordnung *a*.

β) Man verwandele das erste Element derjenigen dieser Complexionen, welche nicht *a* zum Endelemente haben, in das nächstfolgende und schreibe für ihr letztes Element das nächstvorhergehende des Zeigers. Dies giebt Complexionen der Ordnung *b*.

γ) Auf die nämliche Weise, wie in β) vorgeschrieben ist, leite man aus diesen Complexionen der Ordnung *b* die der Ordnung *c* und so überhaupt aus den Complexionen der Ordnung des m—1ten Elements die Complexionen der Ordnung des mten Elements ab.

Beweis.

Dass die Complexionen zu welchen man durch die Auflösung kömmt die Summe ν haben ist einleuchtend, dass

dafs man aber, wenn man die Vorschriften der Auflösung beobachtet, auch keine Complexionen übergeht, läfst sich so zeigen;

1) Es ist nur *eine* Union möglich, folglich erhält man alle Unionen, weil nach der ersten Vorschrift der Auflösung zuerst ν hingeschrieben wird.

2) Es wird keine Binion übergangen, denn es läfst sich hier nur eine denken, die sich mit a anfängt und von dieser geht man aus und eine jede andere, welche nicht a zum Anfangselemente hat, läfst sich dadurch, dafs man successiv ihr erstes Element in das nächstvorhergehende und ihr letztes in das nächstfolgende des Zeigers verwandelt auf die gedachte Binion der Ordnung a reduciren, so dafs also eine jede Binion zur Summe ν, welche die Ordnung a nicht hat, durch die zweite Regel der Auflösung aus der Binion der Ordnung a erhalten wird.

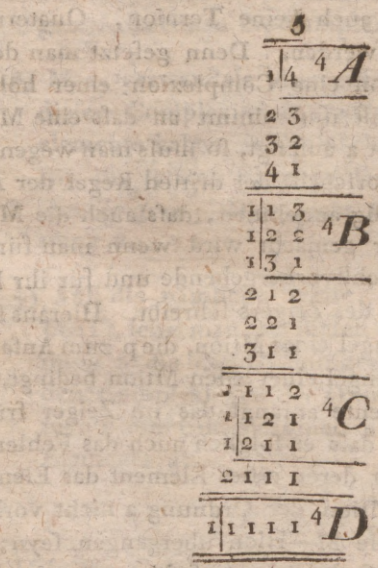
3) Es kann aber auch keine Ternion, Quaternion u. s. w, übergangen werden. Denn gesetzt man denkt sich unter einer Mtion eine Complexion einer höhern Klasse als die zweite ist und nimmt an dafs eine Mtion fehlt die sich nicht mit a anfängt, so mufs man wegen der zweiten und dritten Vorschrift der dritten Regel der Auflösung auch nothwendig annehmen, dafs auch die Mtion fehlt, welche aus ihr gemacht wird wenn man für ihr erstes Element das nächstvorhergehende und für ihr letztes das nächstfolgende des Zeigers schreibt. Hieraus folgt offenbar, dafs der Mangel einer Mtion, die p zum Anfangselemente hat, den Mangel einer jeden Mtion bedingt, die sich mit einem Elemente anfängt das im Zeiger früher als p vorkömmt und dafs er folglich auch das Fehlen einer Mtion voraussetzt deren erstes Element das Element a ist. Ist aber eine Mtion der Ordnung a nicht vorhanden, so mufs auch die M—tion übergangen seyn, die aus dieser Mtion der Ordnung a entsteht, wenn man ihr erstes Element a wegläfst und für ihr Endelement das

nächſtfolgende des Zeigers ſubſtituirt. (*Aufl.* 3, a,). Es erfordert alſo der Mangel einer jeden Mtion jedesmal den Mangel einer M—1tion oder welches einerlei iſt, das Fehlen einer Complexion irgend einer höhern Klaſſe als der zweiten, bedingt nothwendig, daſs durch die Auflöſung auch eine Complexion der nächſtvorhergehenden Klaſſe und daher auch eine der zweiten Klaſſe übergangen wird.

Hierhergehörige Beiſpiele ſind die zur erſten Auflöſung gegebenen.

1. *Anmerkung.*

Die erſte Anmerkung zur zweiten Auflöſung der Aufgabe des §. 29 iſt auch auf die jetzt gegebene Auflöſung anzuwenden, wie man aus der hierunter ſtehenden Figur deutlich ſieht.



2. *An-*

2. *Anmerkung.*

Das nämliche was in der zweiten Anmerkung pag. 91 gesagt ist, muss auch hier erinnert werden.

3)

β. *Rein combinatorische Auflösung.*

Man schreibe das erste Element des Zeigers hin und leite hieraus die Complexionen zur Summe 2, aus diesen wieder die Complexionen zur Summe 3 und so ferner aus den Complexionen zur Summe $\nu-1$ die zur Summe ν her und zwar auf folgende Weise:

1) Allen Complexionen zur nächstvorhergehenden Summe setze man das erste Element des Zeigers vor.

2) Man substituire für das erste Element jeder Complexion zur nächstvorhergehenden Summe, das dem Zeiger nach nächstfolgende Element und schreibe die Complexionen die man hierdurch erhält, in der Ordnung wie sie gefunden sind, unter die welche man durch die erste Vorschrift bekommen hat.

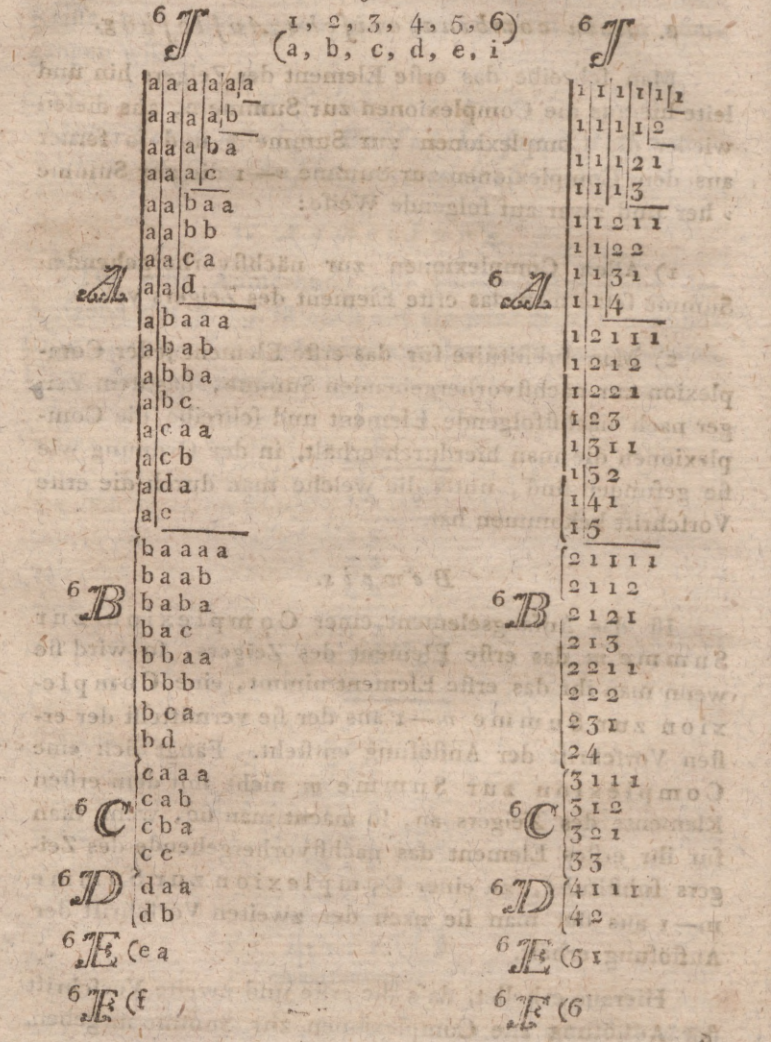
Beweis.

Ist das Anfangselement einer Complexion zur Summe m das erste Element des Zeigers, so wird sie wenn man ihr das erste Element nimmt, eine Complexion zur Summe $m-1$ aus der sie vermittelst der ersten Vorschrift der Auflösung entsteht. Fängt sich eine Complexion zur Summe m nicht mit dem ersten Elemente des Zeigers an, so macht man sie, wenn man für ihr erstes Element das nächstvorhergehende des Zeigers substituirt, zu einer Complexion zur Summe $m-1$ aus der man sie nach der zweiten Vorschrift der Auflösung erhält.

Hieraus erhellet, dass die erste und zweite Vorschrift der Auflösung alle Complexionen zur Summe m geben,

wenn man alle Complexionen zur Summe m—1 hat. Es giebt aber die Auflösung die Complexionen zur Summe 1 und zur Summe 2 gewifs, folglich auch alle Complexionen zur Summe 3, zur Summe 4 u. f. f. zur Summe *v*.

Beifpiele.



1. An-

1. *Anmerkung*

Die gegebene Auflösung giebt lexicographische Involutionen (§. 29. 8. *Rein combinatorische Aufl.* 1. *Anmerk.*). Das Zeichen für diese Involutionen ist $\mathfrak{J}$ und zur Bezeichnung des Inbegriffs ihrer Complexionen der Ordnung a, der Ordnung b, der Ordnung c u. s. w. bedient man sich der Buchstaben $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ u. s. f. f.

2. *Anmerkung.*

Das nämliche was in der zweiten Anmerkung pag. 94 von der Klassen- und lexicographischen Involution gesagt ist, die sich auf die Combinationen zu bestimmten Summen beziehn, gilt auch für diese beiden Involutionen, wenn sie Variationen zu bestimmten Summen darstellen.

1. *Zusatz.*

Es ist $\overset{v}{\mathfrak{J}}\binom{1, 2, 3, 4 \ldots}{a, b, c, d \ldots} = \overset{v}{\mathfrak{J}}\binom{1, 2, 3, 4 \ldots}{a, b, c, d \ldots}$

2. *Zusatz.*

Es ist $\overset{6}{\mathfrak{J}}\binom{1, 2, 3, \ldots 6}{a, b, c, \ldots g} = \overset{6}{\mathfrak{A}} + \overset{6}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}} + \overset{6}{\mathfrak{D}} + \overset{6}{\mathfrak{E}} + \overset{6}{\mathfrak{F}} + \overset{6}{\mathfrak{G}}.$

Hieraus erhellet schon welche Gleichung für die Summe n überhaupt statt findet.

* * *

Solche Zusätze als der 3te bis 7te Zusatz des §. 29 für die lexicographischen Combinationsinvolutionen sind,

fallen für die lexicographiſchen Variationsinvolutionen weg.

Darſtellung einzelner Klaſſen der Variationen mit Wiederholungen zu beſtimmten Summen.

§. 49.

Aufgabe.

Es ſoll die *m*te Klaſſe zur Summe *n* für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots}{a, b, c, d, e, f \ldots}$ dargeſtellt werden.

Arithmetiſch-combinatoriſche Auflöſung.

2) Man ſetze neben m—1 Einſen rechter Hand das Supplement zur Summe *n*, ſo hat man die erſte Complexion der geſuchten Klaſſe.

2) Aus dieſer leite man die zweite, aus der zweiten die dritte, aus der dritten die vierte Complexion her u. ſ. w. wie man nach der Vorſchrift des 12ten und 13ten Satzes des §. 6 aus einer Zahl die nächſtgröſsere ableitet.

Subſtituirt man in den gefundenen Zahlencomplexionen für die Zahlenelemente die mit ihnen, dem Zeiger nach, correſpondirenden Buchſtaben, ſo bekömmt man die Buchſtabencomplexionen der verlangten Klaſſe.

Beweis.

Die Auflöſung ſchreibt vor, daſs man zuerſt die Complexion hinſetzen ſoll, welche als Zahl betrachtet die geringſte *m*zifrige Zahl zur Summe *n* iſt und daſs man aus dieſer ſo viele andere Complexionen herleiten ſoll, als nach den Vorſchriften des 12ten und 13ten Satzes des §. 6, daraus abgeleitet werden können. Dieſe Vorſchriften führen aber jedesmal von einer *m*zifrigen Zahl der Summe *n* zur nächſtgröſsern *m*zifrigen Zahl der nämlichen

chen Summe, alſo übergeht man gewiſs keine der geſuchten Zahlencomplexionen, wenn eine jede als eine *m*zifrige Zahl zur Summe *n* angeſehen werden kann. Dies iſt aber der Fall, folglich giebt die Auflöſung alle geſuchte Zahlencomplexionen und daher muſs auch die Subſtitution der Buchſtaben, alle Buchſtabencomplexionen geben.

Beiſpiel.

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \ldots \\ a, & b, & c, & d, & e, & f \ldots \end{pmatrix}$$

^{10}D

1117	1441	2341	3511
1126	1513	2413	4114
1135	1522	2422	4123
1144	1531	2431	4132
1153	1612	2512	4141
1162	1621	2521	4213
1171	1711	2611	4222
1216	2116	3115	4231
1225	2125	3124	4312
1234	2134	3133	4321
1243	2143	3142	4411
1252	2152	3151	5113
1261	2161	3214	5122
1315	2215	3223	5131
1324	2224	3232	5212
1333	2233	3241	5221
1342	2242	3313	5311
1351	2251	3322	6112
1414	2314	3331	6121
1423	2323	3412	6211
1432	2332	3421	7111

2)

Rein combinatoriſche Auflöſung.

1) In dem Zeiger durchlaufe man von dem *n*ten Elemente an, von der Rechten nach der Linken, *m* Ele-

mente und ſchreibe des *m*te Element, auf welches man hierbei kömmt, als Union hin.

2) Hieraus leite man die Binionen, aus den Binionen die Ternionen, aus dieſen wieder, die Quaternionen u. ſ. f. aus den M—1tionen die Mtionen ab und zwar nach folgenden allgemeinen Vorſchriften.

α) Man ſetze allen ſchon gefundenen Complexionen der nächſtvorhergehenden Klaſſe zuerſt *a* vor, dies giebt für die nächſtfolgende Klaſſe die Complexionen der Ordnung *a*.

β) Man verwandele das erſte Element der Complexionen, die α) gegeben hat, in das nächſtfolgende des Zeigers und ſetze für ihr letztes Element das nächſtvorhergehende des Zeigers, übergehe aber bei dieſer Operation diejenigen Complexionen, welche ſich mit *a* endigen. Aus den hierdurch gefundenen Complexionen der Ordnung *b*, leite man wieder auf die nämliche Weiſe die der Ordnung *c* her u. ſ. w. und ſetze dieſes Verfahren überhaupt ſo lange als möglich fort.

Beweis.

1) Eine jede gegebene Ntion zur Summe *p*, die nicht die Ordnung *a* hat, wird dadurch, daſs man ſucceſſiv für ihr erſtes Element das nächſtvorhergehende und für ihr letztes das nächſtfolgende des Zeigers ſubſtituirt auf eine Ntion der nämlichen Summe reducirt, welche die Ordnung *a* hat. Für jede Ntion zur Summe *p*, wenn ſie nich die Ordnung *a* beſitzt giebt es alſo eine Ntion der Ordnung *a* zur Summe *p*, aus welcher ſie abgeleitet wird, wenn man ſucceſſiv für das erſte Element derſelben das nächſtfolgende und für das letzte das nächſtvorhergehende des Zeigers ſchreibt. (*Aufl.* β.).

2) Wird

2) Wird einer Ntion der Ordnung *a* zur Summe *p* das erſte Element genommen, ſo wird aus ihr eine N—1tion zur Summe *p*—1, aus welcher ſie durch ein bloſses Vorſchreiben des *a* gemacht werden kann. (*Anfl.* α.)

Aus dieſen beiden Sätzen folgt offenbar, daſs die Auflöſung alle Ntionen zu einer gewiſſen Summe giebt, wenn ſie alle N—1tionen zur nächſtvorhergehenden Summe darſtellt. Man erhält aber durch die Auflöſung die hier einzig möglichen Union zur Summe n—(m—1) gewiſs, folglich bekömmt man durch ſie auch alle Binionen zur Summe n—(m—1)+1 und deswegen wieder alle Ternionen zur Summe n—(m—1)+2 und aus dieſem Grunde wieder, alle Quaternionen zur Summe n—(m—1)+3 u. ſ. f. ſo daſs man durch die Auflöſung auch gewiſs alle Mtionen zur Summe n—(m—1)+m—1, oder welches einerlei iſt, daſs man alle Mtionen zur Summe *n* bekömmt.

Bei-

Beiſpiele.

(1, 2, 3, 4 . .
a, b, c, d . .)

^{8}E

1	1	1	1	4
1	1	1	2	3
1	1	1	3	2
1	1	1	4	1
1	1	2	1	3
1	1	2	2	2
1	1	2	3	1
1	1	3	1	2
1	1	3	2	1
1	1	4	1	1
1	2	1	1	3
1	2	1	2	2
1	2	1	3	1
1	2	2	1	2
1	2	2	2	1
1	2	3	1	1
1	3	1	1	2
1	3	1	2	1
1	3	2	1	1
1	4	1	1	1
2	1	1	1	3
2	1	1	2	2
2	1	1	3	1
2	1	2	1	2
2	1	2	2	1
2	1	3	1	1
2	2	1	1	2
2	2	1	2	1
2	2	2	1	1
2	3	1	1	1
3	1	1	1	2
3	1	1	2	1
3	1	2	1	1
3	2	1	1	1
4	1	1	1	1

^{8}E

a	a	a	a	d
a	a	a	b	c
a	a	a	c	b
a	a	a	d	a
a	a	b	a	c
a	a	b	b	b
a	a	b	c	a
a	a	c	a	b
a	a	c	b	a
a	a	d	a	a
a	b	a	a	c
a	b	a	b	b
a	b	a	c	a
a	b	b	a	b
a	b	b	b	a
a	b	c	a	a
a	c	a	a	b
a	c	a	b	a
a	c	b	a	a
a	d	a	a	a
b	a	a	a	c
b	a	a	b	b
b	a	a	c	a
b	a	b	a	b
b	a	b	b	a
b	a	c	a	a
b	b	a	a	b
b	b	a	b	a
b	b	b	a	a
b	c	a	a	a
c	a	a	a	b
c	a	a	b	a
c	a	b	a	a
c	b	a	a	a
d	a	a	a	a

An-

Anmerkung.

Die Auflöſung giebt Involutionen, wie ſo wohl aus dem ganzen Gange derſelben als auch aus den beiden gegebenen Beiſpielen deutlich erhellet.

§. 50. *a*).

Aufgabe.

Es wird die erſte, oder als Zahl betrachtet, die geringſte Complexion der mten Variationsklaſſe zur Summe n für den Zeiger $\binom{1, 2, 3 \cdot \cdot \varrho}{a, b, c \cdot \cdot r}$ geſucht, in welchem zwar $\varrho < n - m + 1$ aber $m\varrho > n$ gedacht wird.

Arithmetiſch-combinatoriſche Auflöſung.

Es iſt einleuchtend, daſs die jetzige Aufgabe und die des §. 32 die Darſtellung einer und derſelben Complexion verlangen, folglich iſt die Auflöſung der Aufgabe des §. 32 auch zugleich die Auflöſung der jetzigen Aufgabe.

§. 51.

Aufgabe.

Es wird ${}^{n}\mathcal{M}$ geſucht und zwar unter der Bedingung, daſs $\varrho < n - m + 1$ aber $m\varrho > n$ iſt.

$\binom{1, 2, 3 \cdot \cdot \varrho}{a, b, c \cdot \cdot r}$

Arith-

a) Um dieſe und die folgende Aufgabe zu verſtehn, hat man nur nöthig die Anmerkung des §. 31 auf die Variationen anzuwenden. Es muſs aber bei dieſer Anwendung das in der Anmerkung gegebene Beiſpiel für ${}^{15}\mathrm{E}$ übergangen und ſtatt des darinn genannten §. 30 der §. 49 gedacht werden.

Arithmetisch-combinatorische Auflösung. a)

Man suche nach §. 51 die erste Complexion, sehe diese als eine Zahl an und leite hieraus die zweite, aus der zweiten die dritte, aus der dritten die vierte Complexion her u. s. w. indem man immer unter der Bedingung, dafs ϱ die höchste Zifer ist, von der zuletzt gefundenen $m$zifrigen Zahl zur nächstgröfsern $m$zifrigen Zahl der Summe n nach folgenden allgemeinen Regeln fortgeht.

1) Man sucht in der Zahl, von der letzten Zifer an, von der Rechten nach der Linken die erste Zifer auf, welche gröfser ist als 1.

2) Hat man diese Zifer gefunden, so sucht man unter denen die ihr nach der Linken hin folgen, die erste Zifer auf welche kleiner als ϱ ist und vergröfsert diese um 1.

3) Man setzt für die Zifern, welche der vergröfserten, nach der Rechten hin folgen, blofs Einsen, vertheilt aber unter diese, von der letzten an, so das Supplement zur Summe n, dafs man einer jeden so viel davon giebt als ihr nur immer gegeben werden kann, ohne sie gröfser als ϱ zu machen.

Beweis.

Die erste Complexion, von der man hier ausgeht ist als Zahl betrachtet unter allen gesuchten Complexionen die kleinste. Da sich nun eine jede der verlangten Zahlencomplexionen als eine Zahl ansehn läfst, so ist klar, dafs die Auflösung alle Zahlencomplexionen giebt, wenn ihre drei

a) Für diese Auflösung ist in §. 6. kein arithmetischer Satz angegeben, woraus sie unmittelbar genommen werden könnte; der 13te Satz ist nur da anzuwenden wo der Zeiger unbegränzt ist.

drei allgemeinen Regeln so von der zuerst aufgestellten Complexion zu den übrigen führen, dass man allemal von einer Zahl zu der kömmt, die von ihr unter den Bedingungen der Aufgabe die nächstgrösere ist. Dass dies aber der Fall sey, fällt bei einer genauen Betrachtung der drei allgemeinen Regeln der Auflösung gleich in die Augen:

α) Nach der ersten und zweiten Regel substituirt man um die Zahl zu vergrösern für diejenige Zifer die nächstgrösere, die unter den Zifern die geringste Ordnung hat, welche kleiner als ϱ sind und auf welche nach der Rechten hin wenigstens eine Zifer folgt die grösser als 1 ist; von den Zifern also, die bei den Bedingungen der Aufgabe vergrösert werden dürfen, nimmt man dazu die Zifer, welche die geringste Ordnung hat, denn die zuvergrösernde Zifer darf der Aufgabe nach noch nicht gleich ϱ seyn und wegen §. 6, 9. Satz muss auf sie eine Zifer wenigstens folgen die grösser als die geringste Zifer 1 ist.

β) Nach der dritten Regel lässt man auf die um 1 vergrösserte Zifer erst Einsen folgen und supplirt dann die gegebene Summe so, dass die Zahl durch dies Suppliren um so wenig wächst als hierbei nur immer möglich ist. Wenn also nach der ersten und zweiten Regel der Auflösung eine Zifer vergrösert ist, so nimmt man nach der dritten Regel mit den übrigen Zifern die Veränderung vor, dass diese Vergrösserung der einen Zifer auf das Wachsen der Zahl überhaupt so wenig Einfluss hat, als sie nur immer darauf haben kann. (§. 6, 6 Satz, Anmerk. zum 13. Satze).

Vergrösert man aber in einer gegebenen Zahl diejenige Zifer um 1, welche unter denen die vergrösert werden dürfen die geringste Ordnung hat und nimmt mit den übrigen Zifern eine solche Veränderung vor, dass

durch

durch gedachte Vergrößerung die Zahl so wenig als möglich wächst, so erhält man auch gewiss für die Bedingungen unter welchen die Vergrößerung vorgenommen ist, die nächstgrößere Zahl.

Beispiel.

$$\binom{1\ 2\ 3\ 4}{a\ b\ c\ d}$$

$$^{15}E$$

1 2 4 4 4	2 4 3 4 2	3 4 1 4 3	4 2 4 3 2
1 3 3 4 4	2 4 4 1 4	3 4 2 2 4	4 2 4 4 1
1 3 4 3 4	2 4 4 2 3	3 4 2 3 3	4 3 1 3 4
1 3 4 4 3	2 4 4 3 2	3 4 2 4 2	4 3 1 4 3
1 4 2 4 4	2 4 4 4 1	3 4 3 1 4	4 3 2 2 4
1 4 3 3 4	3 1 3 4 4	3 4 3 2 3	4 3 2 3 3
1 4 3 4 3	3 1 4 3 4	3 4 3 3 2	4 3 2 4 2
1 4 4 2 4	3 1 4 4 3	3 4 3 4 1	4 3 3 1 4
1 4 4 3 3	3 2 2 4 4	3 4 4 1 3	4 3 3 2 3
1 4 4 4 2	3 2 3 3 4	3 4 4 2 2	4 3 3 3 2
2 1 4 4 4	3 2 3 4 3	3 4 4 3 1	4 3 3 4 1
2 2 3 4 4	3 2 4 2 4	4 1 2 4 4	4 3 4 1 3
2 2 4 3 4	3 2 4 3 3	4 1 3 3 4	4 3 4 2 2
2 2 4 4 3	3 2 4 4 2	4 1 3 4 3	4 3 4 3 1
2 3 2 4 4	3 3 1 4 4	4 1 4 2 4	4 4 1 2 4
2 3 3 3 4	3 3 2 3 4	4 1 4 3 3	4 4 1 3 3
2 3 3 4 3	3 3 2 4 3	4 1 4 4 2	4 4 1 4 2
2 3 4 2 4	3 3 3 2 4	4 2 1 4 4	4 4 2 1 4
2 3 4 3 3	3 3 3 3 3	4 2 2 3 4	4 4 2 2 3
2 3 4 4 2	3 3 3 4 2	4 2 2 4 3	4 4 2 3 2
2 4 1 4 4	3 3 4 1 4	4 2 3 2 4	4 4 2 4 1
2 4 2 3 4	3 3 4 2 3	4 2 3 3 3	4 4 3 1 3
2 4 2 4 3	3 3 4 3 2	4 2 3 4 2	4 4 3 2 2
2 4 3 2 4	3 3 4 4 1	4 2 4 1 4	4 4 3 3 1
2 4 3 3 3	3 4 1 3 4	4 2 4 2 3	4 4 4 1 2
			4 4 4 2 1

§. 52.

Anmerkung.

Wenn die Zahlen 1, 2, 3, . . n, zur Summe n mit Wiederholungen variirt werden, so ist die Anzahl der Com-

Complexionen der erſten Klaſſe gleich 1, der zweiten Klaſſe gleich $\frac{n-1}{1}$, der dritten Klaſſe gleich $\frac{n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2}$ der vierten Klaſſe gleich $\frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, der fünften Klaſſe gleich $\frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ u. ſ. w. ſo daſs die Zahl, welche die Anzahl der Complexionen der mten Klaſſe beſtimmt, mit dem mten Binomialcoefficienten der n—1ten Dignität einerlei iſt.

V. Von den Variationen zu beſtimmten Summen ohne Wiederholungen.

§. 53.

Aufgabe.

Für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4 \ldots \nu}{a, b, c, d \ldots n}$ alle Variationen ohne Wiederholungen zur Summe ν darzuſtellen.

Rein combinatoriſche Auflöſung.

1) Man ſetze ν hin, ſo hat man ${}^{\nu}A$.

2) Man leite hieraus nach §. 35 die gutgeordneten Binionen her und ſchreibe unter dieſe die Verſetzungen derſelben, ſo hat man ${}^{\nu}B$.

3) Aus den gutgeordneten Binionen folgere man nach §. 35 die gutgeordneten Ternionen und ſetze unter dieſe wieder die Verſetzungen derſelben, ſo bekömmt man die dritte Klaſſe ${}^{\nu}C$.

4) Nach der nämlichen Vorſchrift, welche für die Ableitung der dritten Klaſſe aus der zweiten gegeben iſt,

lasse man wieder die vierte aus der dritten, die fünfte aus der vierten entstehn u. s. w.

Beweis.

Man erhält durch die Auflösung offenbar alle gutgeordnete und schlechtgeordnete Complexionen die für die gegebene Aufgabe möglich sind; die verlangten Variationen sind aber nichts anders als alle gutgeordnete und schlechtgeordnete Complexionen, welche den Bedingungen der Aufgabe entsprechen, folglich thut auch die Auflösung der Aufgabe völlig Genüge.

Beispiele.

$$\binom{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}{a, b, c, d, e, f, g, h}$$

8^8A	h^8A
17	ag
26	bf
35	ce
71 ^8B	ga ^8B
62	fb
53	ec
125	abe
134	acd
152	aeb
215	bac
251 ^8C	bea ^8C
512	fab
521	fba
143	adc
314	cad
341	cda
413	dac
431	dca

Anmerkung.

Bisher haben die Auflösungen wenn sie das Verlangte der Aufgaben in Klassen darstellten, gutgeordnete Klassen ge-

gegeben, die Auflöſung der jetzigen Aufgabe hingegen giebt ſchlechtgeordnete Klaſſen. Wird alſo mit der jetzigen Aufgabe noch ausdrücklich die Bedingung verbunden, daſs die Klaſſen gutgeordnete ſeyn ſollen, ſo muſs man die durch die Auflöſung gefundenen Complexionen wenn ſie Zahlencomplexionen ſind, ſo ordnen, daſs ſie wie wachſende Zahlen, und wenn ſie Buchſtabencomplexionen ſind, daſs ſie lexicographiſch fortlaufen. *a*).

Darſtellung einzelner Klaſſen der Variationen ohne Wiederholungen zu beſtimmten Summen.

§. 54.

Aufgabe.

Es wird die mte Klaſſe zur Summe ν für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots \nu}{a, b, c, d, e, f \ldots n}$ geſucht.

Auflöſung.

Man ſuche nach der Auflöſung der Aufgabe des §. 36 die gutgeordneten Complexionen auf und ſchreibe unter dieſe die Verſetzungen derſelben.

a) Wenn man die Variationen zu beſtimmten Summen ohne Wiederholungen durch ein ſolches Verfahren finden will, welches bei andern Aufgaben die Klaſſen gutgeordnet gegeben hat, ſo übergeht man jederzeit einige Complexionen, nämlich diejenigen welche bei jenem Verfahren aus Complexionen mit Wiederholungen entſtehn würden. So z. B. erhält man bei Beobachtung der Methode, welche ſonſt bei Klaſſeninvolutionen gebraucht wird, für die Summe 8 in der dritten Klaſſe die Complexion 143 nicht, weil ſie aus der Binion 44 entſteht, wenn man dieſer das Element 1 vorſetzt und ihr letztes Element in das nächſtvorhergehende des Zeigers verwandelt.

Beweis.

Für die Richtigkeit dieser Auflösung gilt der nämliche Beweis, der für die Auflösung der Aufgabe des vorhergehenden Paragraphs gegeben ist.

Beispiele.

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)			
		a, b, c, d, e, f, g)	
1 2 7		a b g	
1 3 6		a c f	
1 4 5		a d e	
2 3 5		b c e	
1 7 2		a g b	
2 1 7		b a g	
2 7 1		b g a	
7 1 2		g a b	
7 2 1		g b a	
1 6 3		a f c	
10 C' 3 1 6		e a f	10 C'
3 6 1		c f a	
6 1 3		f a c	
6 3 1		f c a	
1 5 4		a e d	
4 1 5		d a e	
4 5 1		d e a	
5 1 4		e a d	
5 4 1		e d a	
2 5 3		b e c	
3 2 5		c b e	
3 5 2		c e b	
5 2 3		e b c	
5 3 2		e c b	

Anmerkung.

Das allgemeine der Anmerkung und der dazugehörigen Note des §. 53 gehört auch hierher.

§. 55.

Anmerkung.

Um zu bestimmen, wie viele Variationen ohne Wiederholungen die mte Klasse zur Summe n enthält, hat man

man nur nöthig zu berechnen wie viele Combinationen ohne Wiederholungen die mte Combinationsklaſſe beſitzt (§. 37) und die gefundene Zahl durch die Verſetzungszahl $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots m$ zu multipliciren.

Von dem Variiren mehrerer Reihen.

§. 56.

Erklärung.

In Rückſicht auf die Sätze welche in dieſem Paragraphe erklärt werden müſſen, wird auf §. 38 verwieſen. Man hat nämlich die hier aufzuſtellenden Sätze, wenn man in §. 38 ſtatt Combination, Variation lieſet und für die Combinationsklaſſenzeichen die Variationsklaſſenzeichen ſetzt.

Variationen überhaupt.

§. 57.

1. *Aufgabe.*

Für den hierunterſtehenden Zeiger die Variationen mit Wiederholungen zu finden.

$$\left\{\begin{matrix} 1, & 2, & 3 & \\ a & b & c & = p \\ A & B & C & = q \\ \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & = r \\ \mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{C} & = s \end{matrix}\right\}$$

Auflösungen.

(1

a	b	c	
Aa	Ab	Ac	p
Ba	Bb	Bc	qp
Ca	Cb	Cc	
aAa	aAb	aAc	
aBa	aBb	aBc	
aCa	aCb	aCc	
bAa	bAb	bAc	
bBa	bBb	bBc	rqp
bCa	bCb	bCc	
cAa	cAb	cAc	
cBa	cBb	cBc	
cCa	cCb	cCc	
𝔄aAa	𝔄aAb	𝔄aAc	
𝔄″cCa	𝔄″cCb	𝔄″cCc	srqp
𝔅aAa	𝔅aAb	𝔅aAc	
𝔅″cCa	𝔅″cCb	𝔅″cCc	
ℭaAa	ℭaAb	ℭaAc	
ℭ″cCa	ℭ″cCb	ℭ″cCc	

A *B* *C* *D*

pag. 141.

2)

𝔄	a	A	a	
𝔄	a	A	b	p
𝔄	a	A	c	*A*
𝔄	a	B	a	
𝔄	a	B	b	
𝔄	a	B	c	
𝔄	a	C	a	
𝔄	a	C	b	qp
𝔄	a	C	c	*B*
𝔄	b	A	a	
𝔄″	b	C	c	
𝔄	c	A	a	rqp
𝔄″	c	C	c	*C*
𝔅	a	A	a	
𝔅″	c	C	c	
ℭ	a	A	a	
ℭ″	c	C	c	srqp *D*

pag. 144.

2. *Aufgabe.*

Es werden für den hierunter gesetzten Zeiger die Variationen ohne Wiederholungen verlangt.

$$\left\{\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4 \\ a,\ b,\ c,\ d = p \\ A,\ B,\ C,\ D = q \\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d} = r \\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D} = s \end{array}\right\}$$

Auf-

Auflösungen.

a	b	c	d	
	Ab	Ac	Ad	p
	Ba	Bc	Bd	qp
	Ca	Cb	Cd	*B*
	Da	Db	Dc	
	aBc	aBd	aCb	
	aCd	aDb	aDc	
	bAc	bAd	bCa	
	bCd	bDa	bDc	rqp
	cAb	cAd	cBa	*C*
	cBd	cDa	cDb	
	dAb	dAc	dBa	
	dBc	dCa	dCb	
	AbCd	AbDc	AcBd	
	AcDb	AdBc	AdCb	
	BaCd	BaDc	BcAd	srqp
	BcDa	BdAc	BdC	*D*
	CaBd	CaDb	CbAd	
	CbDa	CdAb	CdBa	
	DaBc	DaCb	DbAc	
	DbCa	DcAb	DcBa	

pag. 151.

3. *Aufgabe.*

Es soll für den Zeiger der zweiten Aufgabe die vierte Klasse der Variationen ohne Wiederholungen dargestellt werden.

Auflösung.

𝔄	b	C	d
𝔄	b	D	c
𝔄	c	B	d
𝔄	c	D	b
𝔄	d	B	c
𝔄	d	C	b
𝔅	a	C	d
𝔅	a	D	c
𝔅	c	A	d
𝔅	c	D	a
𝔅	d	A	c
𝔅	d	C	a
ℭ	a	B	d
ℭ	a	D	b
ℭ	b	A	d
ℭ	b	D	a
ℭ	d	A	b
ℭ	d	B	a
𝔇	a	B	c
𝔇	a	C	b
𝔇	b	A	c
𝔇	b	C	a
𝔇	c	A	b
𝔇	c	B	a

sygp D

pag. 158.

Variationen zu bestimmten Summen.

§. 58.

1. Aufgabe.

Die Variationen mit Wiederholungen zur Summe 5 für hierunter befindlichen Zeiger zu entwickeln,

$$\left\{\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \\ a,\ b,\ c,\ d,\ e = p \\ A,\ B,\ C,\ D,\ E = q \\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d},\ \mathfrak{e} = r \\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{E} = s \\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon = \pi \end{array}\right.$$

Auf-

Auflösungen.

1)

$$5\,\overset{p}{A}$$

e	
A	d
B	c
C	b
D	a

$$5\,\overset{qp}{B}$$

a	A c
a	B b
a	C a
b	A b
b	B a
c	A a

$$5\,\overset{rqp}{C}$$

𝔄	a A b
𝔄	a B a
𝔄	b A a
𝔅	a A a

$$5\,\overset{srqp}{D}$$

α	𝔄 a A a

$$5\,\overset{\pi srqp}{E}$$

pag. 161.

2)

α	𝔄	a	A a
𝔄	a	A	b
𝔄	a	B	a
a	A	c	
𝔄	b	A	a
a	B	b	
a	C	a	
A	d		
𝔅	a	A	a
b	A	b	
b	B	a	
B	c		
c	A	a	
C	b		
D	a		
e			

pag. 166.

Anmerkung.

Das nämliche was in der Anmerkung zur ersten Aufgabe des §. 40 in Rücksicht auf die zweite Auflösung gesagt ist, muss auch hier in Hinsicht auf die zweite Auflösung erinnert werden.

2. *Aufgabe.*

Die vierte Klasse der Variationen mit Wiederholungen zur Summe 7 darzustellen.

$$\left\{\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ a, & b, & c, & d = p \\ A, & B, & C, & D = q \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d} = r \\ \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D} = s \end{matrix}\right\}$$

Auflösung.

𝔄	a	A	d
𝔄	a	B	c
𝔄	a	C	b
𝔄	a	D	a
𝔄	b	A	c
𝔄	b	B	b
𝔄	b	C	a
𝔄	c	A	b
𝔄	c	B	a
𝔄	d	A	a
𝔅	a	A	c
𝔅	a	B	b
𝔅	a	C	a
𝔅	b	A	b
𝔅	b	B	a
𝔅	c	A	a
ℭ	a	A	b
ℭ	a	B	a
ℭ	b	A	a
𝔇	a	A	a

srqp
7D

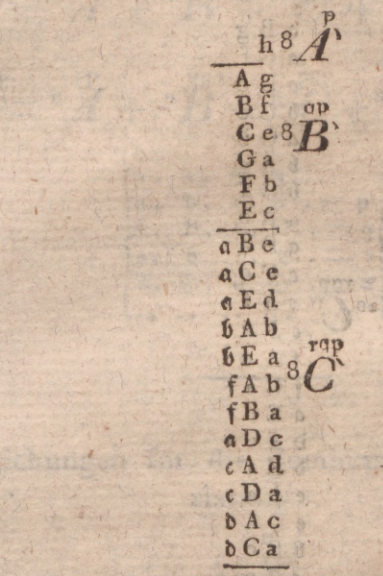
pag. 172.

3. *Aufgabe.*

Es sollen für die Summe 8 alle Variationen ohne Wiederholungen angegeben werden.

$$\left\{\begin{array}{l} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \\ a, b, c, d, e, f, g, h = p \\ A, B, C, D, E, F, G, H = q \\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h} = r \end{array}\right\}$$

Auflöſung.



pag. 178.

4. *Aufgabe.*

Es wird die dritte Klaſſe der Variationen ohne Wiederholungen zur Summe 11 verlangt.

$$\left\{\begin{array}{l} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \\ a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l = p \\ A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L = q \\ a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l = r \end{array}\right\}$$

Auf-

Auflösung.

a B g
a C f
a D e
b C e
a G b
b A g
b G a
g A b
g B a
a F c
c A f
c F a
f A c
f C a
a E d
b A c
b E a
e A d
e D a
b E c
c B e
c E b
c B b
e C b

pag. 180.

§. 59.

Anmerkung.

Aus einer jedem durch Klaſſenzeichen ausgedrückten Gleichung für die Variationen einer und derſelben Elementenreihe, läſst ſich leicht eine Gleichung für die Variationen mehrerer Reihen machen. Folgende Gleichungen ſollen als Beiſpiele dienen:

$$'^{..tsrqp}J = 'A^{p} + 'B^{qp} + 'C^{rqp} + 'D^{srqp} + \cdots$$

$$^{n}J^{..tsrqp} = {}^{n}A^{p} + {}^{n}B^{qp} + {}^{n}C^{pqp} + {}^{n}D^{srqp} + \cdots$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1, 2, 3, 4\cdots \\ a, b, c, d\ldots = p \\ A, B, C, D\ldots = q \\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}\ldots = r \\ \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}\ldots = s \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \end{array}\right\}$$

6. Gleichungen für die Combinationen und Variationen.

§. 60.

Bei der Entwickelung der Combinationen und Variationen ſind jedesmal die Gleichungen aufgeſtellt, welche jede Darſtellung des Geforderten darboth; jetzt ſollen noch die entwickelt werden, welche ſich darbiethen, wenn man die Combinationen überhaupt mit den Combinationen zu beſtimmten Summen und ſo auch die Variationen überhaupt mit den Variationen zu beſtimmten Summen vergleicht und auſser dieſen Gleichungen ſollen noch die dargeſtellt werden, welche die Beziehung der Combinationen und Variationen auf einander giebt.

§. 61.

Eine jede Combination überhaupt kann als eine Combination zu einer beſtimmten Summe und umgekehrt, eine jede Combination zu einer beſtimmten Summe kann als eine Combination überhaupt betrachtet werden. Es läſst ſich daher eine jede *m*te Klaſſe der Combinationen überhaupt (mit oder ohne Wiederholungen) als ein Inbegriff

griff mehrerer *m*ten Klaſſen der Combinationen (mit oder ohne Wiederholungen) zu verſchiedenen beſtimmten Summen und zwar zu allen den Summen anſehn, für welche, dem gegebene Zeiger nach, eine *m*te Klaſſe ſtatt findet. Eben dies nämliche gilt auch von den Variationen.

α) Gleichungen für die Combinationen mit Wiederholungen.

§. 62.

Es iſt für dem Zeiger

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \ldots \\ a, & b, & c, & d, & e \ldots \end{matrix}\right)$$

$$\begin{array}{l} {}'A = {}^1A + {}^2A + {}^3A + {}^4A + {}^5A + \ldots \\ {}'B = \phantom{{}^1A + {}} {}^2B + {}^3B + {}^4B + {}^5B + \ldots \\ {}'C = \phantom{{}^1A + {}^2A + {}} {}^3C + {}^4C + {}^5C + \ldots \\ {}'D = \phantom{{}^1A + {}^2A + {}^3A + {}} {}^4D + {}^5D + \ldots \\ \;'' \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad '' \end{array}$$

Addirt man die hier über einanderſtehenden Klaſſen ſo erhält man die Gleichung;

$$\left.\begin{array}{l} \;{}'A \\ +{}'B \\ +{}'C \\ +{}'D \\ \;\;'' \end{array}\right\} = {}^1A + \left.\begin{array}{l} {}^2A \\ +{}^2B \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}^3A \\ +{}^3B \\ +{}^3C \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}^4A \\ +{}^4B \\ +{}^4C \\ +{}^4D \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}^5A \\ +{}^5B \\ +{}^5C \\ +{}^5D \\ \;\;'' \end{array}\right\} + \ldots\ldots,$$

Zu-

Zusatz.

Es ist für den Zeiger

$$\left\{\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots \\ a,\ b,\ c,\ d\ldots = p \\ A,\ B,\ C,\ D\ldots = q \\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}\ldots = r \\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ldots = s \\ ''\ \ ''\ \ ''\ \ '' \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} {}^{p}\acute{A} \\ +{}^{pq}\acute{B} \\ +{}^{rqp}\acute{C} \\ +{}^{srqp}\acute{D} \\ '' \end{array}\right\} = {}^{p}\grave{A} + \left.\begin{array}{l} {}^{p}\grave{A} \\ {}^{qp}\grave{B} \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}^{p}\grave{A} \\ {}^{qp}\grave{B} \\ {}^{rqp}\grave{C} \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}^{p}\grave{A} \\ {}^{qp}\grave{B} \\ {}^{rqp}\grave{C} \\ {}^{srqp}\grave{D} \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} {}^{p}\grave{A} \\ {}^{qp}\grave{B} \\ {}^{rqp}\grave{C} \\ {}^{srqp}\grave{D} \end{array}\right\} + \ldots :$$

β) Gleichungen für die Combinationen ohne Wiederholungen.

§. 63.

Für den ersten Zeiger des vorhergehenden Paragraphs ist.

$$\begin{array}{l} \grave{A} = {}^{1}\grave{A} + {}^{2}\grave{A} + {}^{3}\grave{A} + {}^{4}\grave{A} + {}^{5}\grave{A} + {}^{6}\grave{A} + \ldots \\ \grave{B} = \qquad\qquad {}^{5}\grave{B} + {}^{4}\grave{B} + {}^{5}\grave{B} + {}^{6}\grave{B} + \ldots \\ \grave{C} = \qquad\qquad\qquad\qquad + {}^{6}\grave{C} + \ldots \\ '' \end{array}$$

Die Addition der übereinanderstehenden Klassen giebt diese Gleichung:

$$\left.\begin{matrix}A\\ +B\\ +C\\ \text{''}\end{matrix}\right\} = {}^{1}A + {}^{2}A + {}^{3}A + {}^{4}A + {}^{5}A + {}^{6}A + \cdots$$
$$+ {}^{3}B + {}^{4}B + {}^{5}B + {}^{6}B$$
$$+ {}^{6}C$$

Zusatz.

Für den zweiten Zeiger des vorigen Paragraphs ist

$$\left.\begin{matrix}{}^{p}A\\ +{}^{qp}B\\ +{}^{rqp}C\\ \text{''}\end{matrix}\right\} = {}^{1}\overset{p}{A} + {}^{2}\overset{p}{A} + {}^{3}\overset{p}{A} + {}^{4}\overset{p}{A} + {}^{5}\overset{p}{A} + {}^{6}\overset{p}{A} + \cdots$$
$$+ {}^{3}\overset{qp}{B} + {}^{4}\overset{qp}{B} + {}^{5}\overset{qp}{B} + {}^{6}\overset{qp}{B}$$
$$+ {}^{6}\overset{rqp}{C}$$

γ) Gleichungen für die Variationen mit Wiederholungen.

§. 64.

Für den ersten Zeiger des §. 62 ist

$$'A = {}^{1}A + {}^{2}A + {}^{3}A + {}^{4}A + {}^{5}A + \cdots$$
$$'B = {}^{2}B + {}^{3}B + {}^{4}B + {}^{5}B + \cdots$$
$$'C = {}^{3}C + {}^{4}C + {}^{5}C + \cdots$$
$$'D = {}^{4}D + {}^{5}D + \cdots$$
$$\text{''}$$

Dies

Anmerkung. Für den Zeiger $\binom{1;\ 2,\ 3\cdots}{a;\ b,\ c\cdots}$ ist die geringste Summe einer Binion ohne Wiederholungen gleich 1+2, die geringste einer Ternion gleich 1+2+3, die geringste einer Quaternion gleich 1+2+3+4, u. s. f. und eben so verhält es sich bei den Variationen ohne Wiederholungen.

Dies giebt dieſe Gleichung:

$$\left.\begin{matrix} {}'A \\ +{}'B \\ +{}'C \\ +{}'D \\ \text{''} \end{matrix}\right\} = {}^1A \left.\begin{matrix} +{}^2A \\ +{}^2B \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} +{}^3A \\ +{}^3B \\ +{}^3C \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} +{}^4A \\ +{}^4B \\ +{}^4C \\ +{}^4D \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} +{}^5A \\ +{}^5B \\ +{}^5C \\ +{}^5D \\ \text{''} \end{matrix}\right\} + \ldots,$$

Zuſatz.

Für den zweiten Zeiger des §. 62. iſt

$$\left.\begin{matrix} {}'^{p}A \\ +{}'^{pq}B \\ +{}'^{rqp}C \\ +{}'^{srqp}D \\ \text{''} \end{matrix}\right\} = {}^1A^{p} \left.\begin{matrix} +{}^2A^{p} \\ +{}^2B^{qp} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} +{}^3A^{p} \\ +{}^3B^{qp} \\ +{}^3C^{rqp} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} +{}^4A^{p} \\ +{}^4B^{qp} \\ +{}^4C^{rqp} \\ +{}^4D^{srqp} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} +{}^5A^{p} \\ +{}^5B^{qp} \\ +{}^5C^{rqp} \\ +{}^5D^{srqp} \end{matrix}\right\} + \ldots;$$

δ) Gleichungen für die Variationen ohne Wiederholungen.

§. 65.

Für den erſten Zeiger des §. 62 iſt

$$\begin{aligned} A` &= {}^1A` + {}^2A` + {}^3A` + {}^4A` + {}^5A` + {}^6A` + \ldots \\ B` &= \quad\quad {}^3B` + {}^4B` + {}^5B` + {}^6B` + \ldots \\ C` &= \quad\quad\quad\quad {}^6C` + \ldots \\ \text{''} & \end{aligned}$$

Wird hier das übereinanderſtehende addirt, ſo erhält man die Gleichung:

$$\left.\begin{matrix}+A\\+B\\+C\\''\end{matrix}\right\}=A+{}^{2}A+{}^{3}A\left\}\begin{matrix}+{}^{4}A\\+{}^{3}B\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}+{}^{5}A\\+{}^{4}B\\+{}^{3}C\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}+{}^{6}A\\+{}^{5}B\\+{}^{4}C\end{matrix}\right\}$$

Zuſatz.

Es iſt für den zweiten Zeiger des §. 62

$$\left.\begin{matrix}{}^{\mathrm{p}}A\\+B\\{}^{\mathrm{rqp}}\\+C\\''\end{matrix}\right\}={}^{1}A+{}^{2}A+{}^{3}A\left\}\begin{matrix}+{}^{4}A\\+{}^{3}B\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}+{}^{5}A\\+{}^{4}B\\+{}^{3}C\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}+{}^{6}A\\+{}^{5}B\\+{}^{4}C\end{matrix}\right\}+$$

§. 66.

Erklärung.

Wenn Complexionen, die ſich bloſs durch die Anordnung ihrer Elemente von einander unterſcheiden, als identiſche betrachtet werden, ſo hat man den Inbegriff derſelben, wenn man ſie zählt, eine davon hinſchreibt und dieſer die gefundene Zahl vorſetzt *a*). Wird alſo in einer Variationsklaſſe jede gutgeordnete Complexion mit den ſchlecht-

*) Eine Complexion iſt z. B. mit ihren Verſetzungen völlig gleichgültig, wenn man die Complexionen als Summen oder Produkte betrachtet, alſo ihre Elemente durch die Addition oder Multiplication verbunden denkt.

ſchlechtgeordneten als gleichgültig angeſehn, die aus ihr durch die Verſetzung ihrer Elemente entſpringen, ſo braucht man nur um die mte Variationsklaſſe zu erhalten, alle ihre gutgeordnete Mtionen aufzuſuchen und einer jeden derſelben die ihr zugehörige Verſetzungszahl vorzuſetzen. Oder man hat die mte Variationklaſſe der Elemente a, b, c, d . . ., wenn man die mte Combinationsklaſſe dieſer Elemente hinſchreibt und jeder Combination gedachte Verſetzungszahl vorſetzt.

Will man anzeigen, daſs man ſich einer jeden Complexion einer Combinationsklaſſe die Verſetzungszahl vorgeſchrieben denkt, ſo ſchreibt man vor das Klaſſenzeichen einen ihm gleichnamigen kleinen deutſchen Buchſtaben. Dieſer Buchſtabe wird dann Polynomialcoefficient genannt. Z, B. $_{\mathfrak{c}}\mathrm{C}$. Hieraus erhellet auch was unter $_{\mathfrak{i}}\mathrm{J}$ zu verſtehen iſt.

Anmerkung.

Ietzt ſollen die Gleichungen aufgeſtellt werden, welche unter der Vorausſetzung gelten, daſs eine Combination mit ihren Verſetzungen einerlei iſt

ζ) Gleichungen zwiſchen Combinationen und Variationen mit Wiederholungen.

§. 67.

1)

Es iſt $'A = {}_{\mathfrak{a}}\mathrm{A}$, $'B = {}_{\mathfrak{b}}\mathrm{B}$, $'C = {}_{\mathfrak{c}}\mathrm{C}$, $'D = {}_{\mathfrak{d}}\mathrm{D}$ u. ſ. w.

alſo $'A + 'B + 'C + 'D + \cdots = {}_{\mathfrak{a}}\mathrm{A} + {}_{\mathfrak{b}}\mathrm{B} + {}_{\mathfrak{c}}\mathrm{C} + {}_{\mathfrak{d}}\mathrm{D} + \ldots$

3)

Wegen §. 63 ist

$$\begin{aligned}
{}_a'A &= {}_a{}^1A + {}_a{}^2A + {}_a{}^3A + {}_a{}^4A + \cdots \\
{}_b'B &= \quad {}_b{}^2B + {}_b{}^3B + {}_b{}^4B + \cdots \\
{}_c'C &= \quad\quad {}_c{}^3C + {}_c{}^4C + \cdots \\
{}_d'D &= \quad\quad\quad {}_d{}^4D + \cdots \\
&\text{''}
\end{aligned}$$

daher

$$\left.\begin{matrix} {}_a'A \\ + {}_b'B \\ + {}_c'C \\ + {}_d'D \\ \text{''} \end{matrix}\right\} = {}_a{}^1A + \left.\begin{matrix} {}_a{}^2A \\ + {}_b{}^2B \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} {}_a{}^3A \\ + {}_b{}^3B \\ + {}_c{}^3C \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} {}_a{}^4A \\ + {}_b{}^4B \\ + {}_c{}^4C \\ + {}_d{}^4D \end{matrix}\right\} + \cdots$$

Die erste Seite dieser Gleichung ist die zweite Seite der letzten Gleichung in 1), folglich können diese beiden Seiten gegen einander umgetauscht werden, also ist auch

$$\left.\begin{matrix} 'A \\ + 'B \\ + C \\ + 'D \end{matrix}\right\} = {}_a{}^1A + \left.\begin{matrix} {}_a{}^2A \\ {}_b{}^2B \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} {}_a{}^3A \\ + {}_b{}^3B \\ + {}_c{}^3C \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} {}_a{}^4A \\ + {}_b{}^4B \\ + {}_c{}^4C \\ + {}_d{}^4D \end{matrix}\right\} + \cdots$$

a) Gleichungen zwiſchen Combinationen und Variationen ohne Wiederholungen.

§. 68.

1)

Es iſt $A' = {}_aA', B' = {}_bB', C' = {}_cC', D' = {}_dD'$

u. ſ. w

alſo $A' + B' + C' + D' + \ldots = {}_aA' + {}_bB' + {}_cC' + {}_dD' + \ldots$

2)

Wegen §. 63 iſt

$$\begin{aligned} {}_aA' &= {}_a{}^1A' + {}_a{}^2A' + {}_a{}^3A' + {}_a{}^4A' + {}_a{}^5A' + {}_a{}^6A' + \ldots \\ {}_bB' &= \quad {}_b{}^3B' + {}_b{}^4B' + {}_b{}^5B' + {}_b{}^6B' \\ {}_cC' &= \quad\quad\quad\quad\quad\quad {}_c{}^6C' \\ &\ldots \end{aligned}$$

folglich

$$\left.\begin{matrix} {}_aA' \\ + {}_bB' \\ + {}_cC' \\ \ldots \end{matrix}\right\} = {}_a{}^1A' + \left\{ {}_a{}^2A' + {}_b{}^3B' \right\} + \left\{ {}_a{}^3A' + {}_b{}^4B' \right\} + \left\{ {}_a{}^4A' + {}_b{}^5B' \right\} + \left\{ {}_a{}^5A' + {}_b{}^6B' + {}_c{}^6C' \right\} + \ldots$$

alſo auch wegen der letzten Gleichung in 2)

$$\left.\begin{matrix} A' \\ + B' \\ + C' \\ \ldots \end{matrix}\right\} = {}_a{}^1A' + \left\{ {}_a{}^2A' + {}_b{}^3B' \right\} + \left\{ {}_a{}^3A' + {}_b{}^4B' \right\} + \left\{ {}_a{}^4A' + {}_b{}^5B' \right\} + \left\{ {}_a{}^5A' + {}_b{}^6B' + {}_c{}^6C' \right\} + \ldots$$

§. 69.

Anmerkung.

Die Gleichungen in §. 63—§. 66 ſtellen ganz deutlich das Verhältniſs vor Augen, in welchen die Combinationen überhaupt mit den Combinationen zu beſtimmten Summen und in welchen die Variationen überhaupt mit den Variationen zu beſtimmten Summen ſtehn. Die Gleichungen des §. 67. und §. 68 machen mit dem Verhältniſſe der Variationenen zu den Combinationen bekannnt.

Dritter Abſchnitt.

Anwendung der Combinationslehre auf die Analyſis.

I) Erklärung analytiſcher Zeichen.

§. 70.

α) *Bezeichnung der Reihen.*

Reihe überhaupt wird durch S (Series) angedeutet. Spricht man von der erſten, zweiten, dritten u. ſ. w. *m*ten Reihe ſo bezeichnet man dieſes durch S1, S2, S3 u. ſ. w. Sm.

Zur Bezeichnung einzelner Reihen auſser der Ordnung gebraucht man die kleinen lateiniſchen Buchſtaben p, q, r, s u. ſ. w. auch wohl die griechiſchen π, ϱ, σ, τ u. ſ. f. Z. B. $Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots = p$.

β) *Bezeichnung der Coefficienten.*

Coefficient wird durch c, k oder $\varkappa$ und die Ausdrücke, erſter, zweiter, dritter, vierter u. ſ. w. *m*ter Coefficient werden daher durch $\varkappa 1$, $\varkappa 2$,

$\varkappa 3$, $\varkappa 4$ u. f. w. $\varkappa m$ oder auch durch c1, c2, c3, c4 u. f. f. cm angedeutet. Das Zeichen der Reihen von deren Coefficienten die Rede ist, wird links vor diese Zeichen geschrieben. Hiernach heifst z. B. $p\varkappa m$, der *m*te Coefficient der Reihe p; $\frac{r}{s}\varkappa(n+1)$, der n+1te Coefficient des Quotienten der Reihe r durch die Reihe s; $y^n\varkappa(m+3)$, der m+3te Coefficient der *n*ten Dignität der Reihe y.

Zu den allgemeinen Coefficienten einer Reihe werden die Buchstaben eines lateinischen, deutschen oder eines andern Alphabets genommen, so dafs man den ersten Buchstaben eines Alphabets gewöhnlich zum ersten, den zweiten Buchstaben zum zweiten Coefficienten nimmt u. f. w. Die blofs angenommenen Coefficienten unterscheidet man von den gegebenen dadurch, dafs man über jene einen Punkt setzt, über diese aber nicht. In der Reihe $Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots$ sieht man also die Coefficienten als gegebene an, hingegen in der Reihe $\dot{A}z + \dot{B}z^2 + \dot{C}z^3 + \dot{D}z^4 + \cdots$, als angenommene. Häufig werden auch die Zeichen $\varkappa 1$, $\varkappa 2$, $\varkappa 3$ u. f. f. für die Reihencoefficienten selbst gesetzt und zwar so wie sie hier jetzt angegeben sind für gegebene und mit einem Punkte darüber für angenommene Coefficienten. Sie sind also in diesem Falle Stellvertreter der eigentlichen Coefficienten, daher man auch das Zeichen $\varkappa$, wenn es so gebraucht wird, ein Localzeichen nennt.

γ) *Bezeichnung der Glieder.*

Glied deutet man durch t oder 7 (terminus) an und daher die Ausdrücke erstes, zweites, drittes u. f. f. *m*tes Glied durch 71, 72, 73...7m oder auch durch t1, t2, t3...tm. Die Zeichen der Reihen auf welche sich ein solches Gliedzeichen beziehen soll, werden ihm vorgeschrieben. Will man also, *m*tes Glied der Reihe *p*, *n*tes Glied des Produkts qp, m+ntes Glied des Quotienten $\frac{p}{q}$, durch Zeichen ausdrücken, so schreibt man:

man: $p\gamma m$, $qp\gamma n$, $\frac{p}{q}\gamma(m+n)$. *a*). Oft ſetzt man die Zeichen $p\gamma 1$, $p\gamma 2$, $p\gamma 3$ u. ſ. f, ſtatt der Glieder ſelbſt, in die Reihe p, ſo daſs ſie alſo Stellvertreter der eigentlichen Glieder werden. In dieſem Falle wird γ dann ebenfalls ein Localzeichen genannt *b*).

δ) *Bezeichnung der Exponenten.*

Exponent wird im allgemeinen mit e oder ε bezeichnet. Die Zeichen $p^{m}\gamma 1(e)$, $p^{m}\gamma 2(e)$, $p^{m}\gamma 3(e)$ u. ſ. f. $p^{m}\gamma n(e)$ zeigen daher in der Ordnung wie ſie genannt ſind, den Exponenten des erſten, zweiten, dritten u. ſ. f. nten Gliedes der mten Dignität der Reihe p an.

Bei den Reihen iſt es ſehr vortheilhaft zu den allgemeinen Exponenten Buchſtaben zu nehmen, die mit denen gleichnamig ſind, die man zu den Coefficienten genommen hat. Z. B. $Az^{a}+Bz^{b}+Cz^{c}+Dz^{d}+\ldots$, $\mathfrak{A}z^{\mathfrak{a}}+\mathfrak{B}z^{\mathfrak{b}}+\mathfrak{C}z^{\mathfrak{c}}+\mathfrak{D}z^{\mathfrak{d}}+\ldots$.

a) Wird von dem *m*ten Coefficienten des *n*ten Gliedes des Produkts der Reihen q, p geſprochen, ſo wird dieſes durch $qp\gamma n(\varkappa)m$ angezeigt. Hieraus erhellet wie in andern Fällen die Zeichen $\varkappa$ und γ und die Zeichen der Reihen neben einander geſchrieben werden müſsen.

b) Wenn die Zeichen $\varkappa$ und γ in einer Formel als Localzeichen vorkommen, ſo heiſst dieſe Formel, Localformel. Will man anzeigen, daſs ſich das $\varkappa$ einer ſolchen Formel auf die Coefficienten a, b, c, d u. ſ. f. der Reihe p bezieht z. B. $\varkappa 1$ auf a, $\varkappa 2$ auf b, $\varkappa 3$ auf c u. ſ. w., ſo ſetzt man unter die Formel das Zeichen p (a, b, c, d....), welches dann Scale genannt wird. Es können auch Scale und Zeiger durch ein einziges Zeichen angedeutet werden, z. B. durch $p\binom{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ldots}{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots}$, wenn p (a, b, c, d, e...) die Scale und $\binom{b,\ c,\ d,\ e,\ldots}{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots}$ der Zeiger iſt.

Wenn A, B, C die Coefficienten der Dignitäten z^a, z^b, z^c; ferner $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Coefficienten der z^a, z^b, z^c sind, so dafs also ABC der Coefficient der Dignität z^{a+b+c} ist und man setzt nun $ABC+\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = P$, so pflegt man $ABCz^{a+b+c} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}z^{a+b+c} = Pz^*$ zu setzen, wo also * einen veränderlichen relativen Exponenten bedeutet. Dies wird zur Erläuterung folgender Erklärung dienen:

Wenn man S als eine Summe von Produkten und einen jeden Factor dieser Produkte als einen Coefficienten einer Dignität von z ansieht nnd nun anzeigen will, dafs ein jedes jener Produkte durch die Dignität der z multiplicirt gedacht wird, von welchen es, seiner Factoren wegen, Coefficient ist, so schreibt man neben S das Zeichen z^* *a*).

II. Combinatorische Entwickelung der Produkte.

§. 71.

Allgemeine Wahrheiten, welche die Multiplication der Reihen betreffen.

1) Wenn mehrere Reihen unter sich multiplicirt werden, so stimmt die Handlung die hierbei vorgenommen wird, um die einzelnen Theile des Produkts zu erhalten, völlig mit dem Variiren dieser Reihen überein. Bei der Multiplication zweier Reihen p und q z. B. werden successiv jedem Gliede der Reihe p die einzelnen Glieder der Reihe q vorgeschrieben und eben dieses ist auch der Fall, wenn man nach §. 57 alle Variationen dieser Reihen sucht. Um das Produkt dreier Reihen p, q, r zu erhalten schreibt man jedem Gliede des Produkts qp successiv

a) Das Zeichen * wird sehr häufig auch noch in andern Fällen so relativ als hier gebraucht, nämlich da wo seine Relation und daher sein relativer Werth leicht in die Augen fällt. Ein Beispiel hiervon findet man pag. 112. 4. Zusatz.

ceſſiv die einzelnen Glieder der dritten Reihe r vor und auf die nämliche Weiſe erhält man auch nach §. 57 aus den Variationen zweier Reihen qp durch die dritte r alle Variationen dieſer drei Reihen. Es iſt alſo das Produkt der m Reihen p, q, r . . . x, y der Inbegriff aller Variations-mtionen derſelben welche §. 57 giebt, folglich gleich $\mathcal{M}^{yx..rqp}$. a).

2) Wenn ſich der hierunterſtehende Zeiger

$$\left\{\begin{array}{l} 1, 2, 3, 4, 5 \cdots \\ A, B, C, D, E \ldots = p \\ a. b, c, d, e \ldots = q \\ \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots = x \end{array}\right\}$$

auf m Reihen bezieht, ſo iſt das Produkt dieſer Reihen gleich $\mathcal{M}^{x..rqp} = {}^{m}\mathcal{M}^{x..rpq} + {}^{m+1}\mathcal{M}^{x..rqp} + {}^{m+2}\mathcal{M}^{x..rqp} + {}^{m+3}\mathcal{M}^{x..rqp} + \ldots$ (§. 64). Man erhält alſo für den gegebenen Zeiger auch das Produkt ſeiner m Reihen, wenn man nach §. 49 alle Variations-mtionen derſelben zur Summe m, m+1, m+2, m+3 u. ſ. f. aufſucht.

3) Wenn m Reihen, deren jede die nämliche Gröſse z enthält und die Form $Az^a + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \ldots$ hat, unter ſich multiplicirt werden ſollen, ſo erhält man das Produkt, wenn man die Coefficienten der Reihen erſtlich für ſich unter ſich multiplicirt und hierauf neben jedes gefundene Coefficientenprodukt eine Dignität der z ſchreibt deren Exponent die Summe der Exponenten derjenigen Dignitäten von z iſt, zu welchen die Factoren des

a) Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, daſs die einzelnen Elemente jeder Mtion durch die Multiplication zu verbinden ſind und daſs daher das Zeichen + oder — einer jeden Mtion von den Zeichen ihrer Elemente abhängt.

des Coefficientenprodukts als Coefficienten gehören. Denn werden z. B. die beiden Reihen $Az^a + Bz^b + Cz^c$ und $\mathfrak{A}z^a + \mathfrak{B}z^b + \mathfrak{C}z^c$ nach der gewöhnlichen Methode unter sich multiplicirt so bekömmt man das Produkt:

$$\mathfrak{A}Az^{a+a} + \mathfrak{A}Bz^{a+b} + \mathfrak{A}Cz^{a+c} + \mathfrak{B}Cz^{b+c} + \mathfrak{C}Cz^{c+c},$$
$$+ \mathfrak{B}Az^{b+a} + \mathfrak{B}Bz^{b+b} + \mathfrak{C}Bz^{c+b}$$
$$+ \mathfrak{C}Az^{c+a}$$

welches man offenbar erhalten würde, wenn man erstlich die beiden Reihen $A + B + C$ und $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ unter sich multiplicirte und hierauf neben einen jeden einzelnen Theil des ganzen Produkts eine Dignität der z schriebe, deren Exponent eine solche Summe ist, als vorhin angegeben wurde.

4) Macht man sich für die Coefficienten der Reihen

$$Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots$$
$$\mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 + \ldots$$
$$\alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

den Zeiger

$$\begin{Bmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \\ A, & B, & C, & D \ldots, \\ \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D} \ldots \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta \ldots \end{Bmatrix}$$

so ist jedesmal ein Produkt mehrerer dieser Coefficienten eine Complexion zu einer bestimmten Summe und zwar zu der Summe, welche gleich dem Exponenten derjenigen Dignität von z ist, zu welcher das Produkt als Coefficient gehört. Z. B. $A\mathfrak{C}\mathfrak{d}$ ist eine Ternion zur Summe 8 und zugleich ein Coefficient der z^8.

§. 72.

1. *Aufgabe.*

Es wird das Produkt folgender m Reihen gesucht

$$az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots = \pi$$
$$Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots = \varrho$$
$$\mathfrak{a}z + \mathfrak{b}z^2 + \mathfrak{c}z^3 + \mathfrak{d}z^4 + \ldots = \sigma$$
$$\mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 + \ldots = \tau$$
$$\text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}$$

Auf-

Auflösung.

1) Man suche nach §. 49 für den Zeiger

$$\left\{\begin{array}{llll} 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \\ a, & b, & c, & d \ldots = p \\ A, & B, & C, & D \ldots = q \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d} \ldots = r \\ \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D}, \ldots = s \\ \text{“} & \text{“} & \text{“} & \text{“} \qquad \text{“} \end{array}\right\}.$$

die mte Klasse zur Summe m, zur Summe m+1, zur Summe m+2, u. s. f.

2) Man multiplicire die mte Klasse zur Summe m mit z^m, die mte Klasse zur Summe m+1 mit z^{m+1}, die mte Klasse zur Summe m+2 mit z^{m+2}, u. s. f.

Der Inbegriff des Gefundenen ist das verlangte Produkt, folglich ist dieses gleich

$$\overset{..rqp}{{}^{m}\mathcal{M}}z^m + \overset{..rqp}{{}^{m+1}\mathcal{M}}z^{m+1} + \overset{..rqp}{{}^{m+2}\mathcal{M}}z^{m+2} + \overset{..rqp}{{}^{m+3}\mathcal{M}}z^{m+3} + \ldots . \; a).$$

Beweis.

Man erhält das Produkt der gegebenen Reihen, wenn man erstlich die Reihen unter sich multiplicirt, welche die Coefficienten für sich, also unabhängig von den Dignitäten der z, ausmachen und wenn man hierauf ein jedes der erhaltenen Produkte mit derjenigen Dignität der z multiplicirt zu der dasselbe als Coefficient, gehört. (§. 71. 3).

Das

a) Besitzt eine jede der m Reihen n Glieder, so ist die höchste Dignität der z gleich z^{mn}.

Das Produkt der Reihen, welche die Coefficienten für sich bilden, ist aber für den Zeiger der Auflösung gleich

$$^{m}\mathcal{M}^{..rqp} + {}^{m+1}\mathcal{M}^{..rqp} + {}^{m+2}\mathcal{M}^{..rqp} + {}^{m+3}\mathcal{M}^{..rqp} + {}^{m+4}\mathcal{M}^{..rqq} + \ldots$$

(§. 71, 2)) und eine jede Mtion zur Summe m ist hier ein Coefficient der z^m, eine jede Mtion zur Summe $m+1$ ist hier ein Coefficient der z^{m+1}, u. s. f. (§. 71, 4)), folglich ist auch das gesuchte Produkt das in der Auflösung angegebene.

1. *Beispiel.*

Es soll das Produkt der ersten beiden Reihen der Aufgabe entwickelt werden.

* * *

Hier ist $\mathcal{M} = B$ und daher $m = 2$, also das Produkt $\varrho\pi = {}^{2}B^{qp}z^2 + {}^{3}B^{qp}z^3 + {}^{4}B^{qp}z^4 + {}^{5}B^{qp}z^5 + {}^{6}B^{qp}z^6 + \ldots\ldots$

Es ist aber ${}^{2}B^{pq} = Aa$, ${}^{3}B^{qp} = \frac{A|b}{B|a}$, ${}^{4}B^{qp} = \frac{A|c}{B|b}{}^{\overline{}}_{Ca}$, ${}^{5}B^{qp} = \frac{A|d}{B|c}{}^{\overline{}}_{Cb}{}^{\overline{}}_{Da}$,

folglich auch $\varrho\pi = Aaz^2 + \left.\begin{matrix}+Ab\\+Ba\end{matrix}\right\}z^3 + \left.\begin{matrix}+Ac\\+Bb\\+Ca\end{matrix}\right\}z^4 + \left.\begin{matrix}+Ad\\+Bc\\+Cb\\+Da\end{matrix}\right\}z^5 + \ldots\ldots$

2. *Beispiel.*

Das Produkt der ersten drei Reihen der Aufgabe zu entwickeln.

* * *

Hier

Hier ist $\mathcal{M}\ C$ und daher $m = 3$, also

$$\sigma_{\varrho\pi} = {}^{rqp}C_{z^3} + {}^{rqp}C_{z^4} + {}^{rqp}C_{z^5} + {}^{rqp}C_{z^6} + {}^{rqp}C_{z^7} + \ldots$$

Construirt man diese Klassen nach §. 49 so findet man

${}^{rqp}3C$	${}^{rqp}4C$	${}^{rqp}5C$	${}^{rqp}6C$	${}^{rqp}7C$
aAa,	a'A|b,	a|A|c ,	a|A|d,	a|A|e, u. s. w.
	a|B a	a|B b	a|B c	a|B d
	b A a	a|C a	a|C b	a|C c
		b A b	a|D a	a D b
		b B a	b A c	a E a
		c A a	b B b	b A d
			b C a	b B c
			c A b	b C b
			c B a	b D a
			d A a	c A c
				c B b
				c C a
				d A b
				d B a
				e A a

folglich $\sigma_{\varrho\pi} =$

aAaz^3	+a A b z^4	+a A c|z^5	+a A d'z^6	+a A e|z^7 + ...
	+a B a|	+a B b|	+a B c|	+a B d|
	+b A a|	+a C a|	+a C b|	+a C c|
		+b A b|	+a D a|	+a D b|
		+b B a|	+b A c|	+a E a|
		+c A a|	+b B b|	+b A d|
			+b C a|	+b B c|
			+c A b|	+b C b|
			+c B a|	+b D a|
			+d A a|	+c A c|
				+c B b|
				+c C a|
				+d A b|
				+d B a|
				+e A a|

3. *Bei-*

3 Beispiel.

Es wird das Produkt der drei begrenzten Reihen gesucht.

$$\begin{aligned} az + bz^2 + cz^3 &= \pi \\ Az + Bz^2 + Cz^3 &= \varrho \\ az + bz^2 + cz^3 &= \sigma \end{aligned}$$

* * *

Die höchste Dignität der z welche hier im Produkte vorkommen kann ist gleich z^9 (§. 72, Note *a*)), folglich ist für den Zeiger $\left\{\begin{matrix} 1\ 2\ 3 \\ a\ b\ c = p \\ A\ B\ C = q \\ \mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c} = r \end{matrix}\right\}$, das Produkt $\sigma\varrho\pi$ gleich

$$^{rqp}_{3}C_{z^3} + {}^{rqp}_{4}C_{z^4} + {}^{rqp}_{5}C_{z^5} + {}^{rqq}_{6}C_{z^6} + {}^{rqp}_{7}C_{z^7} + {}^{rqp}_{8}C_{z^8} + {}^{rqp}_{9}C_{z^9}.$$

Diese Klassen lassen sich bis ${}^{6}C$ nach §. 49. entwickeln, hingegen bei der Entwickelung der übrigen Klassen muss man zu §. 51. seine Zuflucht nehmen, Man mache sich daher nach §. 49. arithm. comb. Aufl. und nach §. 51. für die einzelnen Klassen das Schema.

${}^{3}C$	${}^{4}C$	${}^{5}C$	${}^{6}C$	${}^{7}C$	${}^{8}C$	${}^{9}C$
111	112	113	123	133	233	333
	121	122	132	223	323	
	211	131	213	232	332	
		212	222	313		
		221	231	322		
		311	312	331		
			321			

und substituire in diesem für das erste Element jeder Complexion das ihm zugehörige Element der dritten Reihe des Zeigers, für das zweite setze man ein Element der zweiten Reihe

Reihe und für das dritte Element schreibe man ein Element der ersten Reihe des Zeigers, so erhält man $\sigma\varrho\pi$ gleich

$$\begin{array}{l} \mathfrak{a}Aaz^3 + \mathfrak{a}Abz^4 + \mathfrak{a}Acz^5 + \mathfrak{a}Bcz^7 + \mathfrak{a}Ccz^8 + \mathfrak{b}Ccz^8 + \mathfrak{c}Ccz^9 \\ \quad + \mathfrak{a}Ba \quad + \mathfrak{a}Bb \quad + \mathfrak{a}Cb \quad + \mathfrak{b}Bc \quad + \mathfrak{c}Bc \\ \quad + \mathfrak{b}Aa \quad + \mathfrak{a}Ca \quad + \mathfrak{b}Ac \quad + \mathfrak{b}Cb \quad + \mathfrak{c}Cb \\ \qquad\quad + \mathfrak{b}Ab \quad + \mathfrak{b}Bb \quad + \mathfrak{c}Ac \\ \qquad\quad + \mathfrak{b}Ba \quad + \mathfrak{b}Ca \quad + \mathfrak{c}Bb \\ \qquad\quad + \mathfrak{c}Aa \quad + \mathfrak{c}Ab \quad + \mathfrak{c}Ba \\ \qquad\qquad\quad + \mathfrak{c}Ba \end{array}$$

Anmerkung.

Sollten die drei Reihen $az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^5$

$Az + Bz^2 + Cz^3$

$\mathfrak{a}z + \mathfrak{b}z^2 + z^3 + \mathfrak{d}z^4$

unter sich multiplicirt werden und man legte bei der Entwickelung des Produkts den Zeiger $\begin{cases} 1, 2, 3, 4, 5 \\ a, b, c, d, e \\ A, B, C, \\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \end{cases}$

zum Grunde, so würden in ${}^{6}C$, ${}^{7}C$ u. s. f. alle Complexionen weggelassen werden müssen in welchen D, E und e vorkämen, weil diese Elemente in dem Zeiger fehlen also als Null anzusehn sind und daher auch die Produkte zu Null machen in denen sie sich befinden. Hieraus wird erhellen, wie zu verfahren ist, wenn das Produkt mehrerer Reihen, die nicht eine gleiche Anzahl Elemente haben, entwickelt werden soll.

Zusatz.

Es ist das $m + 1$te Glied des Produkts der m Reihen der Aufgabe, oder welches das nämliche ist, es ist

$$\ldots\tau\sigma\varrho\pi/n+1 = {}^{m+n}\mathcal{M}_{z}^{\ldots rqp\ m+n}$$

§. 73.

2. *Aufgabe.*

Es soll das Produkt folgender m Reihen angegeben werden.

$$\begin{aligned}
&az^{\delta} + bz^{2\delta} + cz^{3\delta} + dz^{4\delta} + \ldots = \pi\\
&Az^{\delta} + Bz^{2\delta} + Cz^{3\delta} + Dz^{4\delta} + \ldots = \varrho\\
&\mathfrak{a}z^{\delta} + \mathfrak{b}z^{2\delta} + \mathfrak{c}z^{3\delta} + \mathfrak{d}z^{4\delta} + \ldots = \sigma\\
&\mathfrak{A}z^{\delta} + \mathfrak{B}z^{2\delta} + \mathfrak{C}z^{3\delta} + \mathfrak{D}z^{4\delta} + \ldots = \tau\\
&\quad''\qquad\quad''\qquad\quad''\qquad\quad''\qquad\quad''
\end{aligned}$$

Auflösung.

Bedient man sich hier des Zeigers der Aufgabe des §. 72, so ist das gesuchte Produkt gleich

$$\overset{\ldots rqp}{{}^{m}\mathcal{M}}_{z^{m\delta}} + \overset{\ldots rqp}{{}^{m+1}\mathcal{M}}_{z^{(m+1)\delta}} + \overset{\ldots rqp}{{}^{m+2}\mathcal{M}}_{z^{(m+2)\delta}} + \overset{\ldots rqp}{{}^{m+3}\mathcal{M}}_{z^{(m+3)\delta}} + \ldots$$

Beweis.

Die Exponenten der z der gegebenen Reihen der zweiten Aufgabe haben die Benennung δ, hingegen die Exponenten der z der Reihen der ersten Aufgabe sind unbenannte Zahlen und hierdurch allein sind auch nur die gegebenen Reihen der beiden Aufgaben von einander unterschieden. Aus diesem Grunde muss auch das Produkt der zweiten Aufgabe aus dem Produkte der ersten entstehn, wenn man in diesem den Exponenten der z die Benennung δ giebt. Da nun hierdurch aus dem Produkte der ersten Aufgabe das in der Auflösung der zweiten Aufgabe aufgestellte Produkt wird, so ist einleuchtend, dass die zweite Aufgabe richtig aufgelöset ist.

Zu-

Zuſatz.

Es iſt $\ldots\tau\sigma\varrho\pi\,?\,(n+1) = {}^{m+n}\mathcal{M}_z^{\ldots rqp}{}^{m+n\delta}$ und

$\ldots\tau\sigma\varrho\pi\,?\,(n+1)\,\varkappa = {}^{m+n}\mathcal{M}^{\ldots rqp}.$

§. 74.

3. Aufgabe.

Es wird das Produkt folgender m Reihen geſucht

$$\begin{aligned}
&a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots = \pi\\
&A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots = \varrho\\
&\mathfrak{a} + \mathfrak{b}z + \mathfrak{c}z^2 + \mathfrak{d}z^3 + \ldots = \sigma\\
&\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \ldots = \tau\\
&\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots
\end{aligned}$$

Auflöſung.

Nimmt man zur Entwickelung des Produkts wieder den Zeiger der erſten Aufgabe, ſo iſt

$$\ldots\tau\sigma\varrho\pi = {}^{m}\mathcal{M}^{\ldots rqp} + {}^{m+1}\mathcal{M}_z^{\ldots rqp} + {}^{m+2}\mathcal{M}_{z^2}^{\ldots rqp} + {}^{m+3}\mathcal{M}_{z^3}^{\ldots rqp} + \ldots$$

Beweis.

Man erhält die gegebenen Reihen der dritten Aufgabe, wenn man eine jede Reihe der erſten Aufgabe durch z dividirt, folglich muſs auch aus dem Produkte der erſten Aufgabe daſs durch die dritte Aufgabe verlangte entſtehn, wenn man jenes durch z^m dividirt. Dividirt man aber das Produkt der erſten Aufgabe durch z^m, ſo bekömmt man das in der Auflöſung der dritten Aufgabe aufgeſtellte, folglich iſt dieſes auch das richtige.

1. Zuſatz.

Es iſt $\tau\sigma_{\varrho\pi}{}^{m}(n+1) = {}^{m+n}_{..rqp}\mathcal{M}z^{n}$, alſo

$\tau\sigma_{\varrho\pi}{}^{m}(n+1)\,\alpha = {}^{m+n}_{..rqp}\mathcal{M}.$

1. Beiſpiel.

Es ſoll das dritte Glied der hierunterſtehenden fünf Reihen

a + bz + cz² + dz³ + ez⁴ + ...
A + Bz + Cz² + Dz³ + Ez⁴ + ...
𝔞 + 𝔟z + 𝔠z² + 𝔡z³ + 𝔢z⁴ + ...
𝔄 + 𝔅z + ℭz² + 𝔇z³ + 𝔈z⁴ + ...
α + βz + γz² + δz³ + εz⁴ + ...

entwickelt werden.

Hier iſt m = 5, $\mathcal{M}$ wird E, n+1 iſt 3 und daher n = 2, und folglich das geſuchte Glied gleich ${}^{7}_{...rqp}E_{z^2}$.

Es iſt aber ${}^{7}_{...rqp}E = \begin{array}{|c|c|c|c|} A & a & \mathfrak{A} & \alpha\gamma \\ A & a & \mathfrak{A} & b\beta \\ A & a & \mathfrak{A} & c\alpha \\ A & a & \mathfrak{B} & a\beta \\ A & a & \mathfrak{B} & b\alpha \\ A & a & \mathfrak{C} & a\alpha \\ A & b & \mathfrak{A} & a\beta \\ A & b & \mathfrak{A} & b\alpha \\ A & b & \mathfrak{B} & a\alpha \\ A & c & \mathfrak{A} & a\alpha \\ B & a & \mathfrak{A} & a\beta \\ B & a & \mathfrak{A} & b\alpha \\ B & a & \mathfrak{B} & a\alpha \\ B & b & \mathfrak{A} & a\alpha \\ C & a & \mathfrak{A} & a\alpha \end{array}$ alſo ${}^{7}_{...rqp}E_{z^2} = \begin{array}{|l|} \hline Aa\mathfrak{A}a\gamma z^2. \\ +Aa\mathfrak{A}b\beta \\ +Aa\mathfrak{A}c\alpha \\ +Aa\mathfrak{B}a\beta \\ +Aa\mathfrak{B}b\alpha \\ +Aa\mathfrak{C}a\alpha \\ +Ab\mathfrak{A}a\beta \\ +Ab\mathfrak{A}b\alpha \\ +Ab\mathfrak{B}a\alpha \\ +Ac\mathfrak{A}a\alpha \\ +Ba\mathfrak{A}a\beta \\ +Ba\mathfrak{A}b\alpha \\ +Ba\mathfrak{B}a\alpha \\ +Bb\mathfrak{A}a\alpha \\ +Ca\mathfrak{A}a\alpha \\ \hline \end{array}$

2. *Beiſpiel.*

Es wird das 8te Glied des Produkts der fünf Reihen geſucht.

$$\begin{aligned} a + bz + cz^2 &= \pi \\ A + Bz + Cz^2 &= \varrho \\ \mathfrak{a} + \mathfrak{b}z + \mathfrak{c}z^2 &= \sigma \\ \mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 &= \tau \\ \alpha + \beta z + \gamma z^2 &= \Phi \end{aligned}$$

Das verlangte Produkt iſt gleich $^{12}E^{tsrqp}z^7$. Entwickelt man die Klaſſe ^{12}E nach §. 51 in Zahlen ſo erhält man das Schema ♀, und daher giebt die Figur ☿ das Produkt

♀		☿	
1 2 3 3 3		+ α B c C c	
1 3 2 3 3		+ α C b C c	
1 3 3 2 3		+ α C c B c	
1 3 3 3 2		+ α C c C b	
2 2 2 3 3		+ β B b C c	
2 2 3 2 3		+ β B c B c	
2 2 3 3 2		+ β B c C b	
2 3 2 2 3		+ β C b B c	
2 3 2 3 2		+ β C b C b	
2 3 3 1 3		+ β C c A c	
2 3 3 2 2		+ β C c B b	
2 3 3 3 1		+ β C c C a	
3 1 2 3 3		+ γ A b C c	
3 1 3 2 3		+ γ A c B c	z^7
3 1 3 3 2		+ γ A c C b	
3 2 1 3 3		+ γ B a C c	
3 2 2 2 3		+ γ B b B c	
3 2 2 3 2		+ γ B b C b	
3 2 3 1 3		+ γ B c A c	
3 2 3 2 2		+ γ B c B b	
3 2 3 3 1		+ γ B c C a	
3 3 1 2 3		+ γ C a B c	
3 3 1 3 2		+ γ C a C b	
3 3 2 1 3		+ γ C b A c	
3 3 2 2 2		+ γ C b B b	
3 3 2 3 1		+ γ C b C a	
3 3 3 1 2		+ γ C c A b	
3 3 3 2 1		+ γ C c B a	

§ 75.

4. *Aufgabe.*

Das Produkt folgender m Reihen darzuſtellen

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}z^{\delta} + \mathfrak{c}z^{2\delta} + \mathfrak{d}z^{3\delta} + \ldots = \pi$$
$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z^{\delta} + \mathfrak{C}z^{2\delta} + \mathfrak{D}z^{3\delta} + \ldots = \varrho$$
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}z^{\delta} + \mathfrak{c}z^{2\delta} + \mathfrak{d}z^{3\delta} + \ldots = \sigma$$
$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z^{\delta} + \mathfrak{C}z^{2\delta} + \mathfrak{D}z^{3\delta} + \ldots = \tau$$
$$\text{“} \quad \text{“} \quad \text{“} \quad \text{“} \quad \text{“}$$

Auflöſung.

In Rückſicht auf den Zeiger der Aufgabe des §. 72 iſt $\ldots\tau\sigma\varrho\pi = {}^{m}\mathcal{M} + {}^{m+1}\mathcal{M}_{z^{\delta}} + {}^{m+2}\mathcal{M}_{z^{2\delta}} + {}^{m+3}\mathcal{M}_{z^{3\delta}} + \ldots$

Beweis.

Eben ſo wie die Richtigkeit der Auflöſung der zweiten Aufgabe durch eine Vergleichnng dieſer zweiten mit der erſten Aufgabe dargethan iſt, läſst ſich hier wieder die Richtigkeit der Auflöſung der vierten Aufgabe durch eine Vergleichung dieſer vierten mit der dritten darthun.

Es iſt $\ldots\tau\sigma\varrho\pi\,(n+1) = {}^{m+n}\mathcal{M}_{z^{n\delta}}$ und daher $\ldots\tau\sigma\varrho\pi\,(n+1)\varkappa = {}^{m+n}\mathcal{M}$.

§. 76.

5. *Aufgabe.*

Das Produkt folgender m Reihen zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
&az^{\mu} + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta} + dz^{\mu+3\delta} + \ldots = v\\
&Az^{\nu} + Bz^{\nu+\delta} + Cz^{\nu+2\delta} + Dz^{\nu+3\delta} + \ldots = w\\
&\mathfrak{a}z^{\pi} + \mathfrak{b}z^{\pi+\delta} + \mathfrak{c}z^{\pi+2\delta} + \mathfrak{d}z^{\pi+3\delta} + \ldots = x\\
&\mathfrak{A}z^{\varrho} + \mathfrak{B}z^{\varrho+\delta} + \mathfrak{C}z^{\varrho+2\delta} + \mathfrak{D}z^{\varrho+3\delta} + \ldots = y\\
&\quad''\qquad\quad''\qquad\quad''\qquad\quad''\qquad\quad''
\end{aligned}$$

Auflösung.

Man lege hier wieder den Zeiger der ersten Aufgabe zum Grunde und setze die Summe der Exponenten $\mu + \nu + \pi + \varrho + \cdots = \Sigma$, so ist

$$\cdots yxwv = {}^{m}\mathfrak{M}_{z}^{\ldots rqp\,\Sigma} + {}^{m+1}\mathfrak{M}_{z}^{\ldots rqp\,\Sigma+\delta} + {}^{m+2}\mathfrak{M}_{z}^{\ldots rqp\,\Sigma+2\delta} + {}^{m+3}\mathfrak{M}_{z}^{\ldots rqp\,\Sigma+3\delta} + \ldots$$

Beweis.

Es ist

$$\begin{aligned}
az^{\mu} + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta} + \ldots &= (a + bz^{\delta} + cz^{2\delta} + \ldots)z^{\mu}\\
Az^{\nu} + Bz^{\nu+\delta} + Cz^{\nu+2\delta} + \ldots &= (A + Bz^{\delta} + Cz^{2\delta} + \ldots)z^{\nu}\\
\mathfrak{a}z^{\pi} + \mathfrak{b}z^{\pi+\delta} + \mathfrak{c}z^{\pi+2\delta} + \ldots &= (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}z^{\delta} + \mathfrak{c}z^{2\delta} + \ldots)z^{\pi}\\
\mathfrak{A}z^{\varrho} + \mathfrak{B}z^{\varrho+\delta} + \mathfrak{C}z^{\varrho+2\delta} + \ldots &= (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z^{\delta} + \mathfrak{C}z^{2\delta} + \ldots)z^{\varrho}\\
''\qquad''\qquad''\qquad\qquad''\quad''\quad''
\end{aligned}$$

Bezeichnet man also die erste eingeklammerte Reihe mit S_1, die zweite mit S_2, die dritte mit S_3 u. s. f. so wird

$$\ldots yxwv = (Sm \ldots\ldots S_3.\ S_2.\ S_1.)\ z^{\mu+\nu+\pi+\varrho+\cdots}$$
$$= (Sm \ldots\ldots S_3.\ S_2.\ S_1.)\ z^{\Sigma}$$

Es ist aber $(Sm \ldots\ldots S_3.\ S_2.\ S_1.) = {}^{m}\mathcal{M}^{..rqp} +$
${}^{m+1}\mathcal{M}^{..rqp}_{z^{\delta}} + {}^{m+2}\mathcal{M}^{..rqp}_{z^{2\delta}} + \ldots$ (§. 75), folglich auch

$$\ldots yxwv = {}^{m}\mathcal{M}^{..rqp}_{z^{\Sigma}} + {}^{m+1}\mathcal{M}^{..rqp}_{z^{\Sigma+\delta}} +$$
$${}^{m+2}\mathcal{M}^{..rqp}_{z^{\Sigma+2\delta}} + {}^{m+3}\mathcal{M}^{..rqp}_{z^{\Sigma+3\delta}} + \ldots$$

Zusatz.

Es ist $..yxwv7\,(n+1) = {}^{m+n}\mathcal{M}^{..rqp}_{z^{\Sigma+n\delta}}$, also
$.yxwv7\,(n+1)\,\varkappa = {}^{m+n}\mathcal{M}^{..rqp}.$

1. *Beispiel.*

Es wird das dritte Glied des Produkts der hierunterstehenden Reihen gesucht.

$$az^2 + bz^4 + cz^6 + dz^7 + \ldots$$
$$Az^3 + Bz^5 + Cz^6 + Dz^8 + \ldots$$
$$\mathfrak{a}z^8 + \mathfrak{b}z^{10} + \mathfrak{c}z^{12} + \mathfrak{d}z^{14} + \ldots$$
$$\mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^3 + \mathfrak{C}z^5 + \mathfrak{D}z^7 + \ldots$$
$$* \qquad * \qquad *$$

Da hier $\mathcal{M} = D$, $m=4$, $n=2$, $\delta=2$; ferner $\mu=2$, $\nu=3$, $\pi=8$, $\varrho=1$ also $\Sigma = 14$ ist, so ist das gesuchte Glied gleich ${}^{6}D^{..rqp}_{z^{18}}$.

Es

Es ist aber ${}^{6}D^{..rqp} = \left|\begin{matrix} A & a & \mathfrak{A} & c \\ A & a & \mathfrak{B} & b \\ A & a & \mathfrak{C} & a \\ A & b & \mathfrak{A} & b \\ A & b & \mathfrak{B} & a \\ A & c & \mathfrak{A} & a \\ B & a & \mathfrak{A} & b \\ B & a & \mathfrak{B} & a \\ B & b & \mathfrak{A} & a \\ C & a & \mathfrak{A} & a \end{matrix}\right|$, folglich ${}^{6}D_{z^{18}}^{..rqp} = \left|\begin{matrix} A & a & \mathfrak{A} & c \\ + A & a & \mathfrak{B} & b \\ + A & a & \mathfrak{C} & a \\ + A & b & \mathfrak{A} & b \\ + A & b & \mathfrak{B} & a \\ + A & c & \mathfrak{A} & a \\ + B & a & \mathfrak{A} & b \\ + B & a & \mathfrak{B} & a \\ + B & b & \mathfrak{A} & a \\ + C & a & \mathfrak{A} & a \end{matrix}\right|_{z^{18}}$

§. 77.

5. *Aufgabe.*

Das Produkt folgender m Reihen zu bestimmen

$$az^a + bz^b + cz^c + dz^d + \ldots = \pi$$
$$Az^A + Bz^B + Cz^C + Dz^D + \ldots = \varrho$$
$$\mathfrak{a}z^{\mathfrak{a}} + \mathfrak{b}z^{\mathfrak{b}} + \mathfrak{c}z^{\mathfrak{c}} + \mathfrak{d}z^{\mathfrak{d}} + \ldots = \sigma$$
$$\text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''}$$

Auflösung.

Für den Zeiger $\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots & \\ a & b & c & d \ldots & = p \\ A & B & C & D \ldots & = q \\ \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \ldots & = r \\ \text{''} & \text{''} & \text{''} & \text{''} & \text{''} \end{matrix}\right|$

ist die allgemeine Form des Produkts diese:

$${}^{m}\mathcal{M}_{z^*}^{..rqp} + {}^{m+1}\mathcal{M}_{z^*}^{..rqp} + {}^{m+2}\mathcal{M}_{z^*}^{..rqp} + {}^{m+3}\mathcal{M}_{z^*}^{..rqp} + \ldots$$

Beweis.

Dass das angegebene Produkt in Rücksicht auf seine Coefficienten richtig sey, folgt schon aus einer Vergleichung

chung der jetzigen Aufgabe mit den vorhergehenden; dafs aber die Exponenten hier im allgemeinen mit * bezeichnet werden dürfen folgt aus §. 70 (§. Bezeichn. der Exp.) sobald man die Wahrheit vor Augen hat, dafs ein jeder Coefficient $\overset{\cdot\cdot rqp}{\mathfrak{M}}_m$, $\overset{\cdot\cdot rqp}{\mathfrak{M}}_{m+1}$, $\overset{\cdot\cdot rqp}{\mathfrak{M}}_{m+2}$ u. f. f. eine Summe von Produkten ist, deren Factoren die Coefficienten der gegebenen Reihen sind.

1. *Beispiel.*

Es soll das Produkt der ersten drei Reihen der Aufgabe entwickelt werden.

* * *

Hier ist $\sigma\varrho\pi = {}^{3}C^{rqp}_{z^{*}+} \; {}^{4}C^{rqp}_{z^{*}+} \; {}^{5}C^{rqp}_{z^{*}+} \; {}^{6}C^{rqp}_{z+^{*}} \; {}^{7}C^{rqp}_{z^{*}+} \ldots$

Es ist aber ${}^{3}C^{rqp} = \mathfrak{a}\,A\,a$, ${}^{4}C^{rqp} = \begin{matrix}\mathfrak{a}\,A\,b\\ \mathfrak{a}\,B\,a\\ \mathfrak{b}\,A\,a\end{matrix}$, ${}^{5}C^{rqp} = \begin{matrix}\mathfrak{a}\,A\,c\\ \mathfrak{a}\,B\,b\\ \mathfrak{a}\,C\,a\\ \mathfrak{b}\,A\,b\\ \mathfrak{b}\,B\,a\\ A\,a\end{matrix}$

${}^{6}C^{rqp} = \begin{matrix}\mathfrak{a}\,A\,d\\ \mathfrak{a}\,B\,c\\ \mathfrak{a}\,C\,b\\ \mathfrak{a}\,D\,a\\ \mathfrak{b}\,A\,c\\ \mathfrak{b}\,B\,b\\ \mathfrak{b}\,C\,a\\ \mathfrak{c}\,A\,b\\ \mathfrak{c}\,B\,a\\ \mathfrak{d}\,A\,a\end{matrix}$, u. f. w.

folglich

folglich ist auch

$$\sigma\varrho\pi = \mathfrak{a}Aaz^{\mathfrak{a}+A+a} + \mathfrak{a}Abz^{\mathfrak{a}+A+b} + \mathfrak{a}Acz^{\mathfrak{a}+A+c} + \mathfrak{a}Baz^{\mathfrak{a}+B+a} + \mathfrak{a}Bbz^{\mathfrak{a}+B+b} + \mathfrak{a}Caz^{\mathfrak{a}+C+a} + \mathfrak{b}Aaz^{\mathfrak{b}+A+a} + \mathfrak{b}Abz^{\mathfrak{b}+A+b} + \mathfrak{b}Baz^{\mathfrak{b}+B+a} + \mathfrak{c}Aaz^{\mathfrak{c}+A+a}$$

$$+ \mathfrak{a}Adz^{\mathfrak{a}+A+d} + \mathfrak{a}Bcz^{\mathfrak{a}+B+c} + \mathfrak{a}Cbz^{\mathfrak{a}+C+b} + \mathfrak{a}Daz^{\mathfrak{a}+D+a} + \mathfrak{b}Acz^{\mathfrak{b}+A+c} + \mathfrak{b}Bbz^{\mathfrak{b}+B+b} + \mathfrak{b}Caz^{\mathfrak{b}+C+a} + \mathfrak{c}Abz^{\mathfrak{c}+A+b} + \mathfrak{c}Baz^{\mathfrak{c}+B+a} + \mathfrak{d}Aaz^{\mathfrak{d}+A+a}$$

§. 78.

6. *Aufgabe.*

Es soll das Produkt der hierunter befindlichen m Reihen angegeben werden.

$$\begin{aligned} &av + bw + cx + \ldots\ldots = \pi \\ &Av + Bw + Cx + \ldots\ldots = \varrho \\ &\mathfrak{a}v + \mathfrak{b}w + \mathfrak{c}x + \ldots\ldots = \sigma \\ &\mathfrak{A}v + \mathfrak{B}w + \mathfrak{C}x + \ldots\ldots = \tau \\ &\quad''\quad\quad''\quad\quad''\quad\quad\quad''\end{aligned}$$

Auflösung.

Man suche das Produkt der Reihen, welche die Coefficienten für sich bilden, so erhält man die Coefficienten

enten des gesuchten Produkts. Jeden dieser Coefficienten multiplicire man mit den veränderlichen Grösen wovon seine Factoren Coefficienten sind, so hat man das verlangte Produkt der gegebenen Reihen.

Beweis.

Die Coefficienten der gegebenen Reihen machen, mit ihren veränderlichen Grösen multiplicirt, die Glieder jener Reihen aus, folglich entsteht auch das Produkt der Glieder, oder welches einerlei ist, das Produkt der gegebenen Reihen, wenn man in dem Produkte der Reihen, welche die Coefficienten für sich ausmachen, jeden einzelnen Theil mit den veränderlichen Grösen multiplicirt, von welchen die Factoren des einzelnen Theils die Coefficienten sind.

Beispiel.

Die Coefficienten des Produkts der beiden ersten Reihen π und ϱ sind für den Zeiger

$$\left\{\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4 \ldots & \\ a, & b, & c, & d \ldots & = p \\ A, & B, & C, & D \ldots & = q \end{matrix}\right\}$$

folgende: ${}^{2}\overset{qp}{B}$, ${}^{3}\overset{qp}{B}$, ${}^{4}\overset{qp}{B}$, ${}^{5}\overset{qp}{B}$, ${}^{6}\overset{qp}{B}$, ${}^{7}\overset{qp}{B}$, u. s. f.

Da nun ${}^{2}\overset{qp}{B} = Aa$, ${}^{3}\overset{qp}{B} = \begin{matrix} A|b \\ B\bar{a} \end{matrix}$, ${}^{4}\overset{qp}{B} = \begin{matrix} A|c \\ B\bar{b} \\ Ca \end{matrix}$, ${}^{5}\overset{qp}{B} = \begin{matrix} A|d \\ B\bar{c} \\ Cb \\ Da \end{matrix}$

so ist auch $\pi\varrho = \begin{matrix} Aav^2 + \left\{\begin{matrix} Ab \\ Ba \end{matrix}\right\} wv + Acxv + Adyv + \ldots \\ + Bbw^2 + Bczw \\ + Caxv + Cbxw \\ + Dayv \end{matrix}$

III. Com-

III. Combinatoriſche Entwickelung der Dignitäten.

§. 79.

1. *Aufgabe.*

Es ſoll $(a+b)^m$ entwickelt werden, aber unter der Vorausſetzung, daſs m eine ganze poſitive Zahl iſt.

Auflöſung.

Man ſuche für den Zeiger $\binom{1,\ 2}{a,\ b}$ die mte Klaſſe der Variationen mit Wiederholungen, ſo hat man das Verlangte, oder es iſt

$$(a+b)^m = {}'\mathcal{M}\binom{1,\ 2}{a,\ b} = m\,{}'\mathcal{M}\binom{1,\ 2}{a,\ b}$$

Beweis.

Wenn m eine ganze poſitive Zahl iſt, ſo iſt $(a+b)^m$ ein Produkt von m Factoren, deren ein jeder gleich $a+b$ iſt. Die Multiplication ſolcher m Ausdrücke ſtimmt aber mit dem Variiren m gleicher Reihen überein (§. 71) und giebt daher eine mte Variationsklaſſe. Dieſe mte Variationsklaſſe iſt aber nichts anders als die mte Klaſſe der Variationen mit Wiederholungen für den Zeiger $\binom{1,\ 2}{a,\ b}$, folglich gleich $m\,{}'\mathcal{M}\binom{1,\ 2}{a,\ b}$ (§. 66).

1. *Zuſatz.*

Nach dem zweiten Zuſatze zur dritten Auflöſung der Aufgabe des §. 24. iſt

$${}'\mathfrak{J}\mathcal{M}$$

$'J'\mathfrak{M}$ oder schlechtweg $'\mathfrak{M} = a^m + a^{m-1}{}'A + a^{m-2}{}'B + \ldots$

$\binom{1,2,3\ldots}{a,b,c\ldots}$ $\binom{1,2,3\ldots}{a,b,c\ldots}$

$+ a^0{}'\mathfrak{M}.$

$\binom{2,3,4\ldots}{b,c,d\ldots}$

Wendet man dieses auf $'\mathfrak{M}$ an, so erhält man

$\binom{1,2}{a,b}$

$$'\mathfrak{M} = a^m + a^{m-1}{}'A + a^{m-2}{}'B + a^{m-3}{}'C + \ldots + a^0{}'\mathfrak{M}$$

$\binom{1,2}{a,b}$ $\binom{2}{b}$

oder auch

$$'\mathfrak{M} = a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 + \ldots\ldots + b^m,$$

$\binom{1,2}{a,b}$

Aus $'\mathfrak{M}$ erhält man $m'\mathfrak{M}$, wenn man in dem Werthe

$\binom{1,2}{a,b}$ $\binom{1,2}{a,b}$

für $'\mathfrak{M}$ jedes Glied mit der ihm zugehörigen Versetzungs-

$\binom{1,2}{a,b}$

zahl (§. 20) multiplicirt, folglich ist $m\mathfrak{M}$ und daher auch

$\binom{1,2}{a,b}$

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2}b^2$$

$$+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3}b^3 + \ldots + b^m.$$

2. Zu-

2. Zusatz.

1) Es lassen sich unter der Bedingung, dafs m und n ganze positive Zahlen sind $\left((a+b)^m\right)^{\frac{1}{n}}$ und $\left((a+b)^n\right)^{\frac{1}{m}}$ so entwickeln, dafs man zwei Ausdrücke von einerlei Form erhält, d. h. die beiden Ausdrücke werden von der Beschaffenheit seyn, dafs der eine so durch a, b, m und $\frac{1}{n}$ bestimmt wird, wie der andere durch a, b, und $\frac{1}{m}$; denn $(a+b)^m$ und $(a+b)^n$ haben, entwickelt, gewifs einerlei Form und folglich auch $\left((a+b)^m\right)^{\frac{1}{n}}$ und $\left((a+b)^n\right)^{\frac{1}{m}}$ weil sich die Exponenten $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{m}$ blofs durch die Gröfse der Nenner unterscheiden.

2) Es ist aber $\left((a+b)^m\right)^{\frac{1}{n}} = (a+b)^{\frac{m}{n}}$ und $\left((a+b)^n\right)^{\frac{1}{m}} = (a+b)^{\frac{n}{m}}$, daher ist einleuchtend, dafs auch $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ und $(a+b)^{\frac{n}{m}}$, wenn sie entwickelt werden, Formeln von einerlei Form geben werden. Ist aber dieses der Fall, so kann auch die Form der Formel für $\left((a+b)^{\frac{m}{n}}\right)^n$ nicht von der Form der Formel für $\left((a+b)^{\frac{n}{m}}\right)^n$ unterschieden seyn und folglich gilt dasselbe auch für $(a+b)^m$ und für $(a+b)^{\frac{n^2}{m}}$, weil $\left((a+b)^{\frac{m}{n}}\right)^n = (a+b)^m$ und $\left((a+b)^{\frac{n}{m}}\right)^n = (a+b)^{\frac{n^2}{m}}$ ist.

3) Da

3) Da nun in $(a+b)^{\frac{n^2}{m}}$, n und m in jedem Verhältniſſe gedacht werden können, ſo mag $n^2 = p$ aber kleiner oder gröſser als m und daher $\frac{n^2}{m}$ oder $\frac{p}{m}$ eine eigentliche oder uneigentliche gebrochne Zahl ſeyn. Es haben alſo die Formeln für $(a+b)^{m}$ und $(a+b)^{\frac{p}{m}}$ einerlei Form, oder eben ſo wie die Formel für $(a+b)^{m}$ durch a, b und m beſtimmt wird, wird auch die Formel für $(a+b)^{\frac{p}{m}}$ dnrch a, b und $\frac{p}{m}$ beſtimmt, es mag $\frac{p}{m}$ eine eigentliche oder uneigentliche gebrochne Zahl ſeyn. Es iſt alſo wenn unter $\frac{p}{m}$ irgend eine poſitive gebrochne Zahl gedacht wird,

$$(a+b)^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{p}{m}} + \frac{p}{m} a^{\frac{p}{m}-1} b + \frac{\frac{p}{m} \cdot \frac{p}{m}-1}{1 \cdot 2} a^{\frac{p}{m}-2} b^2 + \ldots$$

3. *Zuſatz.*

1) Wenn man ſich unter m wieder eine ganze poſitive Zahl denkt, ſo wird die Formel für $\frac{1}{(a+b)^{2m+1}}$ ſo durch a, b und 2m+1 ausgedrückt, wie die Formel für $\frac{1}{(a+b)^{m}}$ durch a, b und m ausgedrückt wird. Denn dieſe beiden Formeln müſſen einerlei Form haben, weil ſich $\frac{1}{(a+b)^{2m+1}}$ und $\frac{1}{(a+b)^{m}}$ bloſs durch die Exponen-

ten

ten $2m+1$ und m von einander unterſcheiden und dieſe doch nur durch die Gröſse von einander unterſchieden ſind.

2) Kommen aber die Formeln für $\frac{1}{(a+b)^{2m+1}}$ und $\frac{1}{(a+b)^{m}}$ in ihrer Form mit einander überein, ſo müſſen auch die Formeln für $\frac{(a+b)^{2m}}{(a+b)^{2m+1}}$ und $\frac{(a+b)^{2m}}{(a+b)^{m}}$ einerlei Form haben und aus dieſem Grunde auch die für $(a+b)^{-1}$ und $(a+b)^{m}$, weil $\frac{(a+b)^{2m}}{(a+b)^{2m+1}} = (a+b)^{-1}$ und $\frac{(a+b)^{2m}}{(a+b)^{m}} = (a+b)^{m}$ iſt.

3) Hat aber die Formel für $(a+b)^{-1}$ mit der für $(a+b)^{m}$ einerlei Form, ſo gilt dieſes auch für $\left((a+b)^{-1}\right)^{p}$ und $\left((a+b)^{m}\right)^{p}$ und deswegen wieder für $\left((a+b)^{-p}\right)^{\frac{1}{q}}$ und $\left((a+b)^{mp}\right)^{\frac{1}{q}}$. Es iſt aber $\left((a+b)^{-p}\right)^{\frac{1}{q}} = (a+b)^{-\frac{p}{q}}$ und $\left((a+b)^{mp}\right)^{\frac{1}{q}} = (a+b)^{\frac{mp}{q}}$, folglich haben auch die Formeln für $(a+b)^{-\frac{p}{q}}$ und $(a+b)^{\frac{mp}{q}}$ einerlei Form, es mag p mit q in einem Verhältniſſe ſtehn in welchem man will.

4) Da nun den Formeln für $(a+b)^{\frac{mp}{q}}$ und $(a+b)^{m}$ einerlei Form zukömmt, weil dieſes ſchon von ſelbſt klar iſt,

ist, wenn $\frac{mp}{q}$ eine ganze Zahl ist und durch den zweiten Zusatz dargethan wird, wenn $\frac{mp}{q}$ eine gebrochene Zahl ist, so ist einleuchtend, dafs auch die Formel für $(a+b)^{-\frac{p}{q}}$ so durch a, b und $-\frac{p}{q}$ bestimmt wird, wie die Formel für $(a+b)^m$ durch a, b und m bestimmt ist und zwar es mag $\frac{p}{q}$ eine ganze oder gebrochne Zahl seyn.

Setzt man hier also $-\frac{p}{q} = -n$, so dafs also unter n eine jede positive ganze und gebrochne Zahl gedacht werden darf, so ist

$$(a+b)^{-n} = a^{-n} + \frac{-n}{1}a^{-n-1} + \frac{-n.(-n-1)}{1.2}a^{-n-2} + ..$$

u. s. w.

4. *Zusatz.*

Jede Dignität des Binomiums hat die Form welche für $(a+b)^m$ im ersten Zusatze bestimmt ist, es mag der Exponent eine positive oder negative eine ganze oder gebrochene Zahl seyn, oder es bleibt für einen jeden Werth, den man dem *m* giebt

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2} + \text{u. s. w. } a).$$

Willkührlicher Satz.

Die Binomialcoefficienten bezeichnet man mit grofsen deutschen Buchstaben, denen man oben zur Linken den Expo-

a) Hingegen die Form, welche in der Auflösung der ersten Aufgabe angegeben wurde, findet nur statt, wenn der Exponent eine ganze positive Zahl ist.

Exponenten der Dignität anhängt, so dafs $^{m}\mathfrak{A}$ den zweiten, $^{m}\mathfrak{B}$ den dritten, $^{m}\mathfrak{C}$ den vierten, $^{m}\mathfrak{D}$ den fünften Binomialcoefficienten der mten Dignität anzeigt u. s. f.

Hiernach ist also

$$(a+b)^{m} = a^{m} + {}^{m}\mathfrak{A}\,a^{m-1}b + {}^{m}\mathfrak{B}\,a^{m-2}b^{2} + {}^{m}\mathfrak{C}\,a^{m-3}b^{3} + \ldots$$

$$(a+b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} + {}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{A}\,a^{\frac{p}{q}-1}b + {}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{B}\,a^{\frac{p}{q}-2}b^{2} + {}^{\frac{p}{q}}\mathfrak{C}\,a^{\frac{p}{q}-3}b^{3} + \ldots$$

$$(a+b)^{-r} = a^{-r} + {}^{-r}\mathfrak{A}\,a^{-r-1}b + {}^{-r}\mathfrak{B}\,a^{-r-2}b^{2} + {}^{-r}\mathfrak{C}\,a^{-r-3}b^{3} + \ldots$$

Der nte Binomialcoefficient wird durch $\mathfrak{N}$ angedeutet so dafs also

$$^{m}\mathfrak{N} = \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4 \ldots (m-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots\ldots n-1}$$ ist. *a*).

5. *Zusatz.*

Es ist

$$(a+bz)^{m} = a^{m} + {}^{m}\mathfrak{A}\,a^{m-1}bz + {}^{m}\mathfrak{B}\,a^{m-2}b^{2}z^{2} + {}^{m}\mathfrak{C}\,a^{m-3}b^{3}z^{3} +$$

weil man diesen Ausdruck erhält, wenn man in

$$(a+b)^{m} = a^{m} + {}^{m}\mathfrak{A}\,a^{m-1}b + {}^{m}\mathfrak{B}\,a^{m-2}b^{2} + {}^{m}\mathfrak{C}\,a^{m-3}b^{3} + \ldots$$

bz statt b setzt.

6. *Zusatz.*

Es ist $(az+bz^{2})^{m} = \big((a+bz)z\big)^{m} = (a+bz)^{m}z^{m}$, also auch

$$(az + bz^{2})^{m} = (a^{m} + {}^{m}\mathfrak{A}\,a^{m-1}bz + {}^{m}\mathfrak{B}\,a^{m-2}b^{2}z^{2} + {}^{m}\mathfrak{C}\,a^{m-3}b^{3}z^{3} + \ldots)z^{m}$$

$$= a^{m}z^{m} + {}^{m}\mathfrak{A}\,a^{m-1}bz^{m+1} + {}^{m}\mathfrak{B}\,a^{m-2}b^{2}z^{m+2} + {}^{m}\mathfrak{C}\,a^{m-3}b^{3}z^{m+3} + \ldots$$

a) Man nimmt aber gewöhnlich zur Bezeichnung unbestimmter Binomialcoefficienten, Buchstaben eines Alphabets, welches von dem unterschieden ist, aus welchem man die bestimmten genommen hat.

§. 80.

2. *Aufgabe.*

Es soll die mte Dignität der Reihe $a+b+c+d+e+\ldots = p$ entwickelt werden, unter der Voraussetzung, dafs m eine ganze positive Zahl ist.

Auflösung.

Man erhält das Gesuchte wenn man $\mathcal{M}^{(1,2,3\ldots)}_{(a,b,c\ldots)}$ oder $m\,'\mathcal{M}^{(1,2,3\ldots)}_{(a,b,c\ldots)}$ entwickelt.

Beweis.

Die Richtigkeit der gegebenen Auflösung stützt sich auf die nämlichen Gründe, auf welchen die Richtigkeit der Auflösung der ersten Aufgabe beruhet.

Zusatz.

Da $m\,'\mathcal{M}^{(1,2,3\ldots)}_{(\ldots,b,c,\ldots)} - m^{m}\mathcal{M} + m^{m+1}\mathcal{M} + m^{m+2}\mathcal{M} + m^{m+3}\mathcal{M} + \ldots$ so ist auch

$$(a+b+c+d+\ldots)^m = m^{m}\mathcal{M} + m^{m+1}\mathcal{M} + m^{m+2}\mathcal{M} + m^{m+3}\mathcal{M} + \ldots$$

Beispiel.

Es wird die dritte Dignität der $a+b+c+d+e+\ldots$ gesucht.

* * *

Es

Es ist $(a+b+c+d+e+..)^3 = {}_c{}^3C + {}_c{}^4C + {}_c{}^5C + {}_c{}^6C + {}_c{}^7C + ...$

$$\binom{1,2,3,4..}{a,b,c,d..}$$

Da nun nach §. 30.

${}^3C$	${}^4C$	${}^5C$	${}^6C$	${}^7C$	
aaa,	aab,	$\begin{matrix} a\|a\|c \\ a\|\underline{b\,b} \end{matrix}$,	$\begin{matrix} a\,a\|d \\ a\|b\,c \\ b\,b\,b \end{matrix}$,	$\begin{matrix} a\|a\|e \\ a\|b\,d \\ a\|c\,c \\ b\,b\,c \end{matrix}$,	u. s. w.

so ist auch

$$(a+b+c+d+e+..)^m = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3a^2d + 3a^2e + ... + 3ab^2 + 6abc + 6abd + b^3 + 3ac^2 + 3b^2c$$

§. 81.

3. *Aufgabe.*

Es wird für $(a+b+c+d+\cdots)^m$ eine Formel verlangt, welche pafst, es mag m eine Zahl seyn, was für eine man will.

Auflösung.

Es ist

$$(a+b+c+d+..)^m = a^m + {}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}{}_a{}'A + {}^m\mathfrak{B}_a{}^{m-2}{}_b{}'B + {}^m\mathfrak{C}_a{}^{m-3}{}_c{}'C + ..$$

$$\binom{1,2,3,4..}{b,c,d,e..}$$

Beweis.

Es ſey $(b+c+d+e+..) = S$, alſo $a+b+c+d+e+.. = a+S$ und daher $(a+b+c+d+e+...)^m = (a+S)^m$.

Soll nun hier m jede Zahl ſeyn können, ſo iſt die Formel für $(a+S)^m$ dieſe:

$$(a+S)^m = a^m + {}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}S + {}^m\mathfrak{B}_a{}^{m-2}S^2 + {}^m\mathfrak{C}_a{}^{m-3}S^3 + ..$$

Es iſt aber nach §. 79. 1 Aufg. Aufl.

$$S = {}_a{}'A,\ S^2 = {}_b{}'B,\ S^3 = {}_c{}'C,\ S^4 = {}_b{}'D, \text{ u. ſ. w.}$$
$$\binom{1, 2, 3, 4..}{b, c, d, e..}$$

folglich iſt auch

$$(a+S)^m = a^m + {}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}{}_a{}'A + {}^m\mathfrak{B}_a{}^{m-2}{}_b{}'B + {}^m\mathfrak{C}_a{}^{m-3}{}_c{}'C + \ldots.$$
$$\binom{1, 2, 3, 4..}{b, c, d, e..}$$

Zuſatz.

Es iſt $(a+b+c+d+..)^m\ 7\ (n+1) = {}^m\mathfrak{N}_a{}^{m-n}{}_n{}'\mathfrak{N}.$
$$\binom{1, 2, 3..}{b, c, d..}$$

1. *Beiſpiel.*

Es ſoll $a+b+c+d)^{\frac{2}{3}}$ entwickelt werden.

* * *

Es iſt $(a+b+c+d)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}a^{\frac{2}{3}-1}\ {}_a{}'A +$

$${}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}a^{\frac{2}{3}-2}\ {}_b{}'B + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{C}a^{\frac{2}{3}-3}{}_c{}'C + ..$$
$$\binom{1, 2, 3}{b, c, d}$$

Con-

Conſtruirt man hier die Klaſſen $'A, 'B, 'C$, nach §. 24, α) ein combinatoriſche Aufl. ſo erhält man dieſe Figur:

b	c	d	
bb	bc	bd	$'A$
	cc	cd	$'B$
		dd	
bbb	bbc	bbd	
	bcc	bcd	$'C$
		bdd	
	ccc	ccd	
		cdd	
		ddd	

folglich iſt, wenn man jede Complexion mit ihrer Verſetzungszahl multiplicirt,

$$(a+b+c+d)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}\, a^{\frac{2}{3}-1}(b+c+d)$$

$$+{}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}\, a^{\frac{2}{3}-2}\left(\begin{matrix} b^2+2bc+2bd \\ +c^2+2cd \\ +d^2 \end{matrix}\right) +{}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{C}\, a^{\frac{2}{3}-3}\left(\begin{matrix} b^3+3b^2c+3b^2d \\ +3bc^2+6bcd \\ +3bd^2 \\ +c^3+3c^2d \\ +3cd^2 \\ +d^3 \end{matrix}\right)+\ldots$$

$$= a^{\frac{2}{3}} + \tfrac{2}{3}a^{\frac{2}{3}-1}(b+c+d) + \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}-1}{1\cdot 2}\, a^{\frac{2}{3}-2}\left(\begin{matrix} b^2+2bc+2bd \\ +c^2+2cd \\ +d^2 \end{matrix}\right)$$

$$+\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}-1\cdot\frac{2}{3}-2}{1\cdot 2\cdot 3}\, a^{\frac{2}{3}-3}\left(\begin{matrix} b^3+3b^2c+3b^2d \\ +3bc^2+6bcd \\ +3bd^2 \\ +c^3+3c^2d \\ +3cd^2 \\ +d^3 \end{matrix}\right)+\ldots$$

2. Beispiel.

Es wird die Entwickelung des $(a+b+c+d)^{-7/5}$ verlangt.

Dem Zusatze gemäfs ist

$$(a+b+c+d)^{-7/5} = {}^{-7}\mathfrak{D}_a{}^{-11}{}_b\mathfrak{D}$$

$$= \frac{-7 \cdot -8 \cdot -9 \cdot -10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{-11}{}_b\mathfrak{D} = -210\, a^{-11}{}_b{}^{(1,\,2,\,3)}\mathfrak{D}_{(b,\,c,\,d)}$$

Es ist aber nach der zweiten rein combinatorischen Auflösung der Aufgabe des §. 24, ${}^{(1,\,2,\,3)}\mathfrak{D}_{(b,\,c,\,d)} = \mathfrak{P}$, folglich ist

auch $-210a^{-11}{}_b{}^{(1,\,2,\,3)}\mathfrak{D}_{(b,\,c,\,d)} = \mathfrak{h}$

♀				
	b	b	b	b
	b	b	b	c
	b	b	b	d
	b	b	c	c
	b	b	c	d
	b	b	d	d
	b	c	c	c
	b	c	c	d
	b	c	d	d
	b	d	d	d
	c	c	c	c
	c	c	c	d
	c	c	d	d
	c	d	d	d
	d	d	d	d

$$\mathfrak{h} = -210\,a^{-11}\{b^4 + 4b^3c + 4b^3d + 6b^2c^2 + 12b^2cd + 6b^2d^2 + 4bc^3 + 12bc^2d + 12bcd^2 + 4bd^3 + c^4 + 4c^3d + 6c^2d^2 + 4cd^3 + d^4\}$$

§. 81.

§. 82.

4. *Aufgabe.*

Es wird für $(a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \ldots)^m = \pi^{m_1}$ eine Formel gesucht, und zwar für die Bedingung, dass m eine ganze positive Zahl ist.

Auflösung.

Es ist $\pi^m = m^{m}\mathcal{M} + m^{m+1}\mathcal{M}_z + m^{m+2}\mathcal{M}_{z^2} + m^{m+3}\mathcal{M}_{z^3} + m^{m+4}\mathcal{M}_{z^4} + \cdots$

$\binom{1, 2, 3, 4, 5 \ldots}{a, b, c, d, e \ldots}$

Beweis.

Aus dem Produkte der *m* Reihen (§. 74).

$$\begin{aligned} a + bz + cz^2 + dz^3 + &= \pi \\ A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + &= \varrho \\ \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + &= \sigma \\ \quad " \quad " \quad " \quad " \quad &" \end{aligned}$$

also aus $^{m}\mathcal{M}^{\ldots rqp} + ^{m+1}\mathcal{M}_z^{\ldots rqp} + ^{m+2}\mathcal{M}_{z^2}^{\ldots rqp} + ^{m+3}\mathcal{M}_{z^3}^{\ldots rqp} + ^{m+4}\mathcal{M}_{z^4}^{\ldots rqp} + \ldots,$

wird die mte Dignität der Reihe $a + bz + cz^3 + \ldots$, wenn sich eine jede der andern Reihen in diese eben genannte verwandelt. Folglich ist $(a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots)^m$

$$= {}^{m}\mathcal{M}^{\cdot ppp} + {}^{m+1}\mathcal{M}_z^{\cdot ppp} + {}^{m+2}\mathcal{M}_{z^2}^{\cdot ppp} + {}^{m+3}\mathcal{M}_{z^3}^{\cdot ppp} + \ldots.$$

$$= {}^{m}\mathcal{M} + {}^{m+1}\mathcal{M}_z + {}^{m+2}\mathcal{M}_{z^2} + {}^{m+3}\mathcal{M}_{z^3} + \ldots.$$

$\binom{1, 2, 3 \ldots}{a, b, c \ldots}$

$$= m^{m}\mathcal{M} + m^{m+1}\mathcal{M}_z + m^{m+2}\mathcal{M}_{z^2} + m^{m+3}\mathcal{M}_{z^3} + \ldots.$$

$\binom{1, 2, 3 \ldots}{a, b, c \ldots}$

1. *Zusatz.*

Es ist

$$\pi^m 7\,(n+1) = m^{m+n}\mathfrak{M}_{z^n}, \text{ also } \pi^m 7\,(n+1)\,\varkappa = m^{m+n}\mathfrak{M}.$$
$$\binom{1,\ 2,\ 3\ldots}{a,\ b,\ c\ldots}$$

Beispiel.

Es soll $(a+bz+cz^2+dz^3)^6 75$ entwickelt werden.

* * *

Da $(a+bz+cz^2+dz^3)^m 7\,(n+1) = m^{m+n}\mathfrak{M}_{z^n}$ ist
$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4}{a,\ b,\ c,\ d}$$

so ist auch $(a+bz+cz^2+dz^3)^6 75 = f^{6+4}F_{z^a} = f^{10}F_{z^a}$.
$$\binom{1,2,3,4}{a,b,c,d}\binom{1,2,3,4}{a,b,c,d}$$

Nach §. 33. ist aber

$$^{10}F_{\binom{1,2,3,4}{a,b,c,d}} = \begin{matrix}1\,1\,1\,1\,2\,4\\1\,1\,1\,1\,3\,3\\1\,1\,1\,2\,2\,3\\1\,1\,2\,2\,2\,2\end{matrix} = \begin{matrix}a\,a\,a\,a\,b\,d\\a\,a\,a\,a\,c\,c\\a\,a\,a\,b\,b\,c\\a\,a\,b\,b\,b\,b\end{matrix}$$

$$\text{also } f^{10}F_{\binom{1,2,3,4}{a,b,c,d}} = \left.\begin{matrix}30a^4bd\\+\,15a^4c^2\\+\,60a^3b^2c\\+\,15a^2b^4\end{matrix}\right\}$$

§. 83.

3. *Aufgabe.*

Es soll $(az+bz^2+cz^3+dz^4+\ldots)^m = \pi^m$ unter der Voraussetzung entwickelt werden, dass m eine positive ganze Zahl ist.

Auf-

Auflösung.

Es ist $\pi^m = m^m \mathfrak{M} z^m + m^{m+1} \mathfrak{M} z^{m+1} + m^{m+2} \mathfrak{M} z^{m+2} + m^{m+3} \mathfrak{M} z^{m+3} + \ldots$

$\binom{1, 2, 3, 4, \ldots}{a, b, c, d, \ldots}$

Beweis.

Es ist $(az + bz^2 + cz^3 + \ldots) = (a + bz + cz^2 + \ldots)z$

also $(az + bz^2 + cz^3 + \ldots)^m = (a + bz + cz^2 + \ldots)^m z^m$

Nun ist aber nach §. 82

$(a + bz + cz^2 + \ldots)^m = m^m \mathfrak{M} + m^{m+1} \mathfrak{M} z + m^{m+2} \mathfrak{M} z^2 + \ldots$

$\binom{1, 2, 3, 4, \ldots}{a, b, c, d, \ldots}$

folglich auch $(az + bz^2 + cz^3 + \ldots)^m$

$= (m^m \mathfrak{M} + m^{m+1} \mathfrak{M} z + m^{m+2} \mathfrak{M} z^2 + \ldots) z^m$

$= m^m \mathfrak{M} z^m + m^{m+1} \mathfrak{M} z^{m+1} + m^{m+2} \mathfrak{M} z^{m+2} + \ldots$

$\binom{1, 2, 3, 4, \ldots}{a, b, c, d, \ldots}$

3. *Zusatz.*

Es ist

$\pi^{m/(n+1)} = m^{m+n} \mathfrak{M} z^{m+n}$, also $\pi^{m/(n+1)} z = m^{m+n} \mathfrak{M}$.

§. 83.

6. *Aufgabe.*

Es wird für $(a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots)^m$ eine Formel verlangt, die so beschaffen ist, dass unter m eine jede beliebige Zahl gedacht werden kann.

Auf-

Auflöſung.

Es iſt $(a+bz+cz^2+..)^m$

$$= a^m + {}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}{}_a{}^1A_z + {}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}{}_a{}^2A \Big\} z^2 + \\ + {}^m\mathfrak{B}_a{}^{m-2}{}_b{}^2B$$

$$+ {}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}{}_a{}^3A \Big\} z^3 \quad + {}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}{}_a{}^4A \Big\} z^4+..$$
$$+ {}^m\mathfrak{B}_a{}^{m-2}{}_b{}^3B \quad + {}^m\mathfrak{B}_a{}^{m-2}{}_b{}^4B$$
$$+ {}^m\mathfrak{C}_a{}^{m-3}{}_c{}^3C \quad + {}^m\mathfrak{C}_a{}^{m-3}{}_c{}^4C$$
$$+ {}^m\mathfrak{D}_a{}^{m-4}{}_b{}^4D$$
$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4...}{b,\ c,\ d,\ e...}$$

Beweis.

Es ſey $bz+cz^2+dz^3+..=\Sigma$, ſo iſt $a+bz+cz^2+dz^3+..=a+\Sigma$ und daher $(a+bz+cz^2+dz^3+..)^m=(a+\Sigma)^m=a^m+{}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}\Sigma^1+{}^m\mathfrak{B}_a{}^{m-2}\Sigma^2+{}^m\mathfrak{C}_a{}^{m-3}\Sigma^3+..$

Es iſt aber nach §. 82

$$\Sigma^1 = a^1A_z + a^2A_{z^2} + a^3A_{z^3} + a^4A_{z^4} + ...$$
$$\Sigma^2 = b^2B_{z^2} + b^3B_{z^3} + b^4B_{z^4} + b^5B_{z^5} + ...$$
$$\Sigma^3 = c^3C_{z^3} + c^4C_{z^4} + c^5C_{z^5} + c^6C_{z^6} + ...$$
$$\Sigma^4 = d^4D_{z^4} + d^5D_{z^5} + d^6D_{z^6} + d^7D_{z^7} + ...$$
$$'' \qquad '' \qquad '' \qquad '' \qquad ''$$

ſo glich erhält man, wenn in der für $(a+\Sigma)^m$ entwickelten Formel, ſtatt Σ, Σ^2, Σ^3, Σ^4 die hierfür eben angegebenen Werthe geſetzt werden, die Gleichung:

$(a+\Sigma)$

$$(a+\Sigma)^m = a^m + {}^m\mathfrak{A}a^{m-1}\left({}_a{}^1A z + {}_a{}^2A z^2 + {}_a{}^3A z^3 + \ldots\right) +$$
$$+ {}^m\mathfrak{B}a^{m-2}\left({}_b{}^2B z^2 + {}_b{}^3B z^3 + {}_b{}^4B z^4 + \ldots\right) +$$
$$+ {}^m\mathfrak{C}a^{m-3}\left({}_c{}^3C z^3 + {}_c{}^4C z^4 + {}_c{}^5C z^5 + \ldots\right) +$$
$$\text{u. s. w.} \qquad \left({}^{1,\,2,\,3,\,\ldots}_{b,\,c,\,d,\,\ldots}\right)$$

Multiplicirt man nun hier die in Klammern eingeschlossenen einzelnen Ausdrücke mit dem davor stehenden Factor und ordnet dann die Glieder der dadurch entstandenen Reihe so, dafs jedesmal die Glieder unter einander kommen, welche die nämliche Dignität der z enthalten, so entsteht offenbar die in der Auflösung aufgestellte Gleichung.

1. *Zusatz.*

Es ist $(a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots)^m (n+1) =$

$$\left({}^m\mathfrak{A}a^{m-1}{}_a{}^nA + {}^m\mathfrak{B}a^{m-2}{}_b{}^nB + \ldots + {}^m\mathfrak{N}a^{m-n}{}_n{}^n\mathfrak{N}\right)z^n$$
$$\left({}^{1,\,2,\,3\,\ldots}_{b,\,c,\,d\,\ldots}\right)$$

1. *Beispiel.*

Es soll $(a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \ldots)^{\frac{2}{3}}$ entwickelt werden.

* * *

Es ist $(a + bz + cz^2 + \ldots)^{\frac{2}{3}} =$

$$a^{\frac{2}{3}} + \left.\begin{matrix} {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}a^{\frac{2}{3}-1}{}_a{}^1A z + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}a^{\frac{2}{3}-1}{}_a{}^2A \\ {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}a^{\frac{2}{3}-2}{}_b{}^2B \end{matrix}\right\} z^2$$

$$+ {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}$$

$$\left.\begin{array}{l} +\,{}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}\,a^{\frac{2}{3}-1}\,{}_{a}{}^{3}\mathrm{A} \\ +\,{}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}\,a^{\frac{2}{3}-2}\,{}_{b}{}^{3}\mathrm{B} \\ +\,{}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{C}\,a^{\frac{2}{3}-3}\,{}_{c}{}^{3}\mathrm{C} \end{array}\right\} z^{3} \quad \left.\begin{array}{l} +\,{}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}\,a^{\frac{2}{3}-1}\,{}_{a}{}^{4}\mathrm{A} \\ +\,{}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}\,a^{\frac{2}{3}-2}\,{}_{b}{}^{4}\mathrm{B} \\ +\,{}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{C}\,a^{\frac{2}{3}-3}\,{}_{c}{}^{4}\mathrm{C} \\ +\,{}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{D}\,a^{\frac{2}{3}-4}\,{}_{b}{}^{4}\mathrm{D} \end{array}\right\} z^{4}+\ldots.$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3\ \cdots}{b,\ c,\ d\ \ldots}$$

Die Klaſſen, welche in jedem Gliede unter einander ſtehn, machen eine Klaſſeninvolution aus. Conſtruirt man dieſe Klaſſeninvolutionen für den Zeiger $\binom{1,2,3,4\cdots}{b,c,d,e\ldots}$ nach der erſten rein combinatoriſchen Auflöſung der Aufgabe des §. 29, ſo erhält man:

${}^{1}\mathrm{J}$	${}^{2}\mathrm{J}$	${}^{3}\mathrm{J}$	${}^{4}\mathrm{J}$	${}^{5}\mathrm{J}$	u. ſ. w.
b	c	d	e	f	
	$\overline{bb}$	$\overline{bc}$	$\overline{bd}$	$\overline{be}$	
		$\overline{bbb}$	cc	cd	
			$\overline{bbc}$	$\overline{bbd}$	
			$\overline{bbbb}$	bcc	
				$\overline{bbbc}$	
				$\overline{bbbbb}$	

Subſtituirt man nun die einzelnen Klaſſen dieſer Involutionen für die Klaſſenzeichen der aufgeſtellten Gleichung und giebt jeder Complexion die ihr zugehörige Verſetzungszahl, ſo wird:

$$(a+bz+cz^{2}+\cdots)^{\frac{2}{3}}=$$

$$a^{\frac{2}{3}}+{}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}\,a^{\frac{2}{3}-1}bz+{}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}\,a^{\frac{2}{3}-1}c+{}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}\,a^{\frac{2}{3}-2}b^{2}\Big\}z^{2}+{}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}\,a^{\frac{2}{3}-1}d+{}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}\,a^{\frac{2}{3}-2}2bc+{}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{C}\,a^{\frac{2}{3}-3}b^{3}\Big\}z^{3}$$

$$+{}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}$$

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{2}{3}\mathfrak{A}_{a^{\frac{2}{3}}-1e} \\ +\frac{2}{3}\mathfrak{B}_{a^{\frac{2}{3}}-2(2bd+c^2)} \\ +\frac{2}{3}\mathfrak{C}_{a^{\frac{2}{3}}-3\,3b^2c} \\ +\frac{2}{3}\mathfrak{D}_{a^{\frac{2}{3}}-4b^4} \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} z^4+\frac{2}{3}\mathfrak{A}_{a^{\frac{2}{3}}-1f} \\ +\frac{2}{3}\mathfrak{B}_{a^{\frac{2}{3}}-2}(2be\ 2cd) \\ +\frac{2}{3}\mathfrak{C}_{a^{\frac{2}{3}}-3}(3b^2d\ bc^2) \\ +\frac{2}{3}\mathfrak{D}_{a^{\frac{2}{3}}-4\,4b^3c} \\ +\frac{2}{3}\mathfrak{E}_{a^{\frac{2}{3}}-5b^4} \end{array}\right| z^5+\ldots$$

Werden hier nun noch die Binomialcoefficienten entwickelt, so hat man das Verlangte.

Anmerkung.

Es war gar nicht nöthig, wie vorhin geschehn ist, fünf einzelne Klasseninvolutionen zu construiren, sondern die Construction der einzigen ^5J war schon hinreichend, weil sie die vorhergehenden mit in sich begreift. (§. 29, α) Rein comb. Aufl. 1 Anmerkung). Man hätte auch statt der Klasseninvolution eine lexicographische wählen (§. 29, β) Rein comb. Aufl.) oder die Klassen unmittelbar aus der Figur pag. 101 nehmen können. (§. 29, β, Rein comb. Aufl. 6. Zus.).

2. *Beispiel.*

Es wird $(a+bz+cz^2dz^3)^{-476}$ gesucht.

* * *

Nach dem ersten Zusatze ist $(a+bz+cz^2+dz^3)^{-476} =$

$$\left(^{-4}\mathfrak{A}_{a^{-5}}\,{}_a{}^5A + {}^{-4}\mathfrak{B}_{a^{-6}}\,{}_b{}^5B + {}^{-4}\mathfrak{C}_{a^{-7}}\,{}_c{}^5C + {}^{-4}\mathfrak{D}_{a^{-8}}\,{}_b{}^5D + {}^{-4}\mathfrak{E}_{a^{-9}}\,{}_c{}^5E\right)z^{-5}$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3}{b,\ c,\ d}$$

Für

Für den Zeiger $\binom{1, 2, 3}{b, c, d}$ giebt es keine ${}^5\mathfrak{A}$, die übrigen Klaſſen finden aber ſtatt und zwar es iſt

$${}^5\mathfrak{B} = cd,\ {}^5\mathfrak{C} = \begin{matrix} bbd, \\ bcc \end{matrix},\ {}^5\mathfrak{D} = bbbc,\ {}^5\mathfrak{E} = bbbbb.$$

Daher $(a+bz+cz^2+dz^3)^{-4}\ 57$

$$= (-4\mathfrak{B}_a{}^{-6}{}_2cd + -4\mathfrak{C}_a{}^{-7}(3b^2d + 3bc^2) + -4\mathfrak{D}_a{}^{-8}4b^3c + -4\mathfrak{E}_a{}^{-9}b^5)z^{-5}.$$

$$= (20a^{-6}cd - 60a^{-7}(b^2d + bc^2) + 140a^{-8}b^3c - 56a^{-9}b^5)z^{-5}.$$

2. *Zuſatz.*

Da im erſten Zuſatze unter m eine jede Zahl gedacht werden darf, ſo findet auch zwiſchen dem dort aufgeſtellten Werthe des n+1ten Gliedes und zwiſchen dem Werthe, der im Zuſatze des §. 82 angegeben iſt eine Gleichung ſtatt. Es iſt nämlich unter der Bedingung, daſs m eine ganze poſitive Zahl iſt

$${}^m\mathfrak{m}^{m+n} = ({}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}{}_a{}^nA + {}^m\mathfrak{B}_a{}^{m-2}{}_b{}^nB + \binom{1, 2, 3, \ldots}{a, b, c, \ldots}\qquad \binom{1, 2, 3, \ldots}{b, c, d, \ldots}$$

$${}^m\mathfrak{C}_a{}^{m-3}{}_c{}^nC + \cdots + {}^m\mathfrak{M}_a{}^{m-n}{}_n{}^n\mathfrak{N})z^n.$$

Iſt hier $n > m$, ſo bricht der Ausdruck auf der rechten Seite des Gleichheitzeichens mit ${}^m\mathfrak{M}\ {}^m\mathfrak{m}^m\mathfrak{M}$ ab.

Anmerkung.

Dividirt man beide Seiten der Gleichung durch z^n und denkt sich die Polynomial- und Binomialcoefficienten weg, so erhält man

$$^{n+m}\mathfrak{M} = a^{m-1^n}A + a^{m-2^n}B + a^{m-3^n}C + \ldots + a^{m-n^n}\mathfrak{N}.$$

$$\binom{1, 2, 3..}{a, b, c..} \qquad \binom{1, 2, 3..}{b, c, d..}$$

Diese Gleichung ist für $^{n+m}\mathfrak{M}$ die nämliche, welche

$$\binom{1, 2, 3...}{a, b, c...}$$

die im zweiten Zusatze des §. 30 zuletzt aufgestellte für $^{1+n}\mathfrak{N}$ ist, und daher sind in der Gleichung des zweiten $\binom{1, 2, 3..}{a, b, c..}$ Zusatzes die Ausdrücke $^{m}\mathfrak{A}_a$, $^{m}\mathfrak{B}_b$, $^{m}\mathfrak{C}_c$, $^{m}\mathfrak{D}_b$ u. s. f. nichts anders als die Polynomialcoefficienten, welche der Ausdruck $^{m+n}_{m}\mathfrak{M}$ durch seinen Coefficienten m anzeigt.

§. 85.

7. Aufgabe.

Es wird für $(az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ..)^m$ eine Formel gesucht und zwar unter der Bedingung, dass unter m eine jede ganze und gebrochne, sowohl positive als negative Zahl, gedacht werden darf.

Auflösung.

Es ist $(az+bz^2+cz^3+dz^4+\ldots)^m =$

$$a^m z^m + {}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}{}_a{}^1A\, z^{m+1} + \left.\begin{matrix} {}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}{}_a{}^2A \\ + {}^m\mathfrak{B}_2{}^{m-2}{}_b{}^2B \end{matrix}\right\} z^{m+2}$$

$$+ \left.\begin{matrix} {}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}{}_a{}^3A \\ + {}^m\mathfrak{B}_a{}^{m-2}{}_b{}^3B \\ + {}^m\mathfrak{C}_a{}^{m-3}{}_c{}^3C \end{matrix}\right\} z^{m+3} + \ldots$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4\ldots \\ b, & c, & d, & e\ldots \end{pmatrix}$$

Beweis.

Es ist $az+bz^2+cz^3+dz^4+\ldots = (a+bz+cz^2+dz^3+\ldots)z.$
folglich $(az+bz^2+cz^3+dz^4+\ldots)^m = (a+bz+cz^2+dz^3+\ldots)^m z^m,$

Man erhält also das Verlangte, wenn man die Formel, welche in der Auflösung der 6ten Aufgabe angegeben ist, mit z^m multiplicirt. Geschieht aber dieses, so bekömmt man die Formel der eben gegebenen Auflösung folglich ist diese auch die richtige.

Zusatz.

$$(az+bz^2+cz^3+\ldots)^m (n+1) =$$

$$({}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}{}_a{}^nA + {}^m\mathfrak{B}_a{}^{m-2}{}_b{}^nB + {}^m\mathfrak{C}_a{}^{m-3}{}_c{}^nC$$

$$+ {}^m\mathfrak{D}_a{}^{m-4}{}_b{}^nD + \ldots + {}^m\mathfrak{N}_a{}^{m-n}{}_n{}^n\mathfrak{N})z^{m+n}.$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4\ldots \\ b, & c, & d, & e\ldots \end{pmatrix}$$

§. 86.

8. *Aufgabe.*

Es soll $q^m = (az^\mu + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta} + dz^{\mu+3\delta} + \ldots)^m$ für den Fall entwickelt werden, dafs unter m nur eine positive ganze Zahl gedacht wird.

Auf-

Auflöſung.

Es iſt $q^m = (az^\mu + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta} + dz^{\mu+3\delta} + \ldots)^m =$

$$ {}^m_m\mathcal{M}_z{}^{m\mu} + {}^{m+1}_m\mathcal{M}_z{}^{m\mu+\delta} + {}^{m+2}_m\mathcal{M}_z{}^{m\mu+2\delta} + {}^{m+3}_m\mathcal{M}_z{}^{m\mu+3\delta} + \ldots\ldots $$

$$ \binom{1, 2, 3, 4\ldots}{a, b, c, d\ldots} $$

Beweis.

Es iſt $az^\mu + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta} + dz^{\mu+3\delta} + \ldots =$

$(a + bz^\delta + cz^{2\delta} + dz^{3\delta} + \ldots)z^\mu$,

alſo auch $(az^\mu + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta} + dz^{\mu+3\delta} + \ldots)^m =$

$(a + bz^\delta + cz^{2\delta} + dz^{3\delta} + \ldots)^m z^{m\mu}$.

Vergleicht man $a + bz^\delta + cz^{2\delta} + dz^{3\delta} + \ldots$ mit $a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots$, ſo erhellet, daſs $a + bz^\delta + cz^{2\delta} + dz^{3\delta} + \ldots$ entſteht, wenn man in $a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots$, z^δ ſtatt z, $z^{2\delta}$ ſtatt z^2, $z^{3\delta}$ ſtatt z^3 ſchreibt u. ſ. w. Aus dieſem Grunde muſs man aus $(a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots)^m$ auch $(a + bz^\delta + cz^{2\delta} + dz^{3\delta} + \cdots)^m$ erhalten, wenn man darinn z^δ für z, $z^{2\delta}$ für z^2, $z^{3\delta}$ für z^3 ſubſtituirt u. ſ. f.

Da alſo $(a+bz+cz^2+\ldots)^m =$

$$ {}^m_m\mathcal{M} + {}^{m+1}_m\mathcal{M}z + {}^{m+2}_m\mathcal{M}z^2 + {}^{m+3}_m\mathcal{M}z^3 + \ldots \text{ (§. 82)} $$

$$ \binom{1, 2, 3, \ldots}{a, b, c, \ldots} $$

so ist $(a+bz^{\delta}+cz^{2\delta}+\ldots)^{m} =$

$$ {}^{n}_{m}\mathfrak{M} + {}^{m+1}_{m}\mathfrak{M}z^{\delta} + {}^{m+2}_{m}\mathfrak{M}z^{2\delta} + {}^{m+3}_{m}\mathfrak{M}z^{3\delta} + \ldots $$

$$ \left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3, & \ldots\\ a, & b, & c, & \ldots\end{smallmatrix}\right) $$

und deswegen $(a+bz^{\delta}+cz^{2\delta}+\ldots)^{m} z^{m\mu} =$

$$ {}^{m}_{m}\mathfrak{M}z^{m\mu} + {}^{m+1}_{m}\mathfrak{M}z^{m\mu+\delta} + {}^{m+2}_{m}\mathfrak{M}z^{m\mu+2\delta} + \ldots $$

$$ \left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3, & \ldots\\ a, & b, & c, & \ldots\end{smallmatrix}\right) $$

Zusatz.

$q^{m}7(n+1) = {}^{m+n}_{m}\mathfrak{M}z^{m\mu+n\delta}$ und daher

$q^{m}7(n+1)^{\varkappa} = {}^{m+n}_{m}\mathfrak{M}.$

Beispiel.

Es wird das 6te Glied der $(az^{3}+bz^{5}+cz^{7}+dz^{9}+\ldots)^{3}$ gesucht.

* * *

Hier ist $m=3, \mathfrak{M}=C, \mu=3, \delta=2, n=5$; folglich das gesuchte Glied gleich ${}^{8}_{c}C z^{19}$. Es ist aber ${}^{8}_{c}C = \left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3\ldots\\ a, & b, & c\ldots\end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3\ldots\\ a, & b, & c\ldots\end{smallmatrix}\right)$ $\begin{array}{l|l} a & a\,f \\ a & b\,e \\ a & c\,d \\ b & b\,d \\ b & c\,e \end{array}$,

also auch ${}^{8}_{c}C z^{19} = \left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3\ldots\\ a, & b, & c\ldots\end{smallmatrix}\right)$ $\left.\begin{array}{l} 3a^{2}f \\ +6abe \\ +6acd \\ +3b^{2}d \\ +3bc^{2} \end{array}\right\} z^{19}.$

§. 87.

9. *Aufgabe.*

Es wird für $p^m = (az^\mu + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta} + dz^{\mu+3\delta} + \ldots)^m$ eine Formel gesucht, die für jeden Exponenten m paſst, er mag eine ganze oder gebrochne, positive oder negative Zahl seyn.

Auflösung.

Es ist

$$p^m = a^m z^{m\mu} + {}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}{}_a{}^1A_z{}^{m\mu+\delta} + {}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}{}_a{}^2A\Big\}_z{}^{m\mu+2\delta} + {}^m\mathfrak{B}_a{}^{m-2}{}_b{}^2B\Big\}$$

$$+ {}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}{}_a{}^3A\Big\}_z{}^{m\mu+3\delta} + {}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}{}_a{}^4A\Big\}_z{}^{m\mu+4\delta} + \ldots$$
$$+ {}^m\mathfrak{B}_a{}^{m-2}{}_b{}^3B\Big\} + {}^m\mathfrak{B}_a{}^{m-2}{}_b{}^4B\Big\}$$
$$+ {}^m\mathfrak{C}_a{}^{m-3}{}_c{}^3C\Big\} + {}^m\mathfrak{C}_a{}^{m-3}{}_c{}^4C\Big\}$$
$$+ {}^m\mathfrak{D}_a{}^{m-4}{}_b{}^4D\Big\}$$
$$\left(\begin{matrix}1,2,3,4,\ldots\\ b,c,d,e,\ldots\end{matrix}\right)$$

Beweis.

Es ist $(az^\mu + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta} + \ldots)^m =$ $(a + bz^\delta + cz^{2\delta} + \ldots)^m z^{m\mu}$ (§. 85. Aufl.).

Da nun aus $(a + bz + cz^2 + \ldots)$ die Reihe $(a + bz^\delta + cz^{2\delta} + \ldots)$ wird, wenn man z^δ für z, $z^{2\delta}$ für z^2 setzt u. s. w. so ist klar, dass man die gesuchte Formel erhält, wenn man in der Formel der Auflösung der 6ten Aufgabe die eben genannte Substitution vornimmt und hierauf den hierdurch erhaltenen Ausdruck mit $z^{m\mu}$ multiplicirt. Nimmt man aber diese Operation vor, so bekömmt man die ge-

gebene Auflösung der 9ten Aufgabe, folglich ist diese Auflösung auch die richtige.

Zusatz.

$$p^m 7(n+1(= ({}^m\mathfrak{A}_a{}^{m-1}{}_a{}^n A + {}^m\mathfrak{B}_a{}^{m-2}{}_b{}^n B + {}^m\mathfrak{C}_a{}^{m-3}{}_c{}^n C + \dots + {}^m\mathfrak{N}_a{}^{m-n}{}_n{}^n \mathfrak{N})_z{}^{m\mu+n\delta}$$
$$\binom{1}{b}\binom{2}{c}\binom{3}{d}\binom{4\cdot\cdot}{e\cdot\cdot}$$

Beispiel.

Es soll $(az^5 + bz^3 + cz^1 + dz^{-1} + ez^{-3} + \dots)^{\frac{2}{3}} 77 = q^{\frac{2}{3}} 77$ entwickelt werden.

* * *

Hier ist $m = \frac{2}{3}$, $\mu = 5$, $\delta = -2$, $n = 6$, $\mathfrak{N} = F$, und folglich

$$q^{\frac{2}{3}} 77 = {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{A}_a{}^{\frac{2}{3}-1}{}_a{}^6 A + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{B}_a{}^{\frac{2}{3}-2}{}_b{}^6 B + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{C}_a{}^{\frac{2}{3}-3}{}_c{}^6 C + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{D}_a{}^{\frac{2}{3}-4}{}_b{}^6 D + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{E}_a{}^{\frac{2}{3}-5}{}_c{}^6 E + {}^{\frac{2}{3}}\mathfrak{F}_a{}^{\frac{2}{3}-6}{}_f{}^6 F)_z{}^{-\frac{2\delta}{3}}.$$
$$\binom{1}{b}\binom{2}{c}\binom{3}{d\cdot\cdot}$$

Da nun ${}^6 J = \binom{1}{b}\binom{2}{c}\binom{3}{d\cdot\cdot}$

$$\begin{array}{r} \frac{g}{bf} \\ cc \\ dd \\ \hline bbc \\ bcd \\ ccc \\ \hline bbbd \\ bbcc \\ \hline bbbbc \\ \hline bbbbbb \end{array} \begin{array}{l} {}^6 A, \\ {}^6 B \\ \\ {}^6 C \\ \\ {}^6 D \\ \\ {}^6 E \\ \\ {}^6 F \end{array}$$

so ist auch

$$q^{\frac{2}{3}}77 = (\tfrac{2}{3}\mathfrak{A}a^{\frac{2}{3}-1}g + \tfrac{2}{3}\mathfrak{B}a^{\frac{2}{3}-2}(2bf + 2ce + d^2) +$$
$$\tfrac{2}{3}\mathfrak{C}a^{\frac{2}{3}-3}(3b^2e + 6bcd + c^3) + \tfrac{2}{3}\mathfrak{D}a^{\frac{2}{3}-4}(4b^3d + 6b^2c^2) +$$
$$\tfrac{2}{3}\mathfrak{E}a^{\frac{2}{3}-5}5b^4c + \tfrac{2}{3}\mathfrak{F}a^{\frac{2}{3}-6}b^6)_z - \tfrac{26}{3}.$$

§. 88.

10. *Aufgabe.*

Für die mte Dignität der Reihe $Az^a + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \ldots = p$ eine Formel anzugeben, die unter der Voraussetzung richtig ist, dass man sich unter m nur eine positive ganze Zahl denkt.

Auflösung.

Es ist $p^m = {}^m\mathfrak{M}z^* + {}^{m+1}\mathfrak{M}z^* + {}^{m+2}\mathfrak{M}z^* +$
$${}^{m+3}\mathfrak{M}z^* + \ldots\ldots$$
$$\binom{1, 2, 3, 4, \ldots}{A, B, C, D, \ldots}$$

Beweis.

Es ist hier p^m ein Produkt aus m Factoren deren ein jeder gleich $Az^a + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \ldots$ ist, folglich ist auch (§. 77) hier

$$p^m = {}^m\mathfrak{M}z^{*\cdot\cdot ppp} + {}^{m+1}\mathfrak{M}z^{*\cdot\cdot\cdot ppp} + {}^{m+2}\mathfrak{M}z^{*\cdot\cdot ppp} + {}^{m+3}\mathfrak{M}z^{*\cdot\cdot\cdot ppp} +$$
$${}^{m+4}\mathfrak{M}z^{*\cdot\cdot ppp} + {}^{m+5}\mathfrak{M}z^{*\cdot\cdot ppp} + \ldots\ldots$$

$$= {}^m\mathfrak{M}z^* + {}^{m+1}\mathfrak{M}z^* + {}^{m+2}\mathfrak{M}z^* + {}^{m+3}\mathfrak{M}z^* +$$
$${}^{m+4}\mathfrak{M}z^* + \ldots$$
$$\binom{1, 2, 3, 4, \ldots}{A, B, C, D, \ldots}$$

3. Zusatz.

Es ist

$$p^{m}{}_{7}{}^{(n+1)} = m^{m+n}\mathfrak{M}_{z^*} \text{ und daher } \pi^{m}{}_{7}{}^{(n+1)}{}_{\varkappa} = m^{m+n}\mathfrak{M}$$

Beispiel.

Es soll $p^{5}{}_{7}8$ angegeben werden.

* * *

Da hier $m=5$ und $n=7$ ist, so ist $p^{5}{}_{7}8 = e^{12}\mathfrak{E}_{z^*}$.

$\left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3 \ldots \\ A, & B, & C \ldots\end{smallmatrix}\right)$

Es ist aber $^{12}\mathfrak{E}$, also auch $p^{5}{}_{7}8$

$^{12}\mathfrak{E}$ | $p^{5}{}_{7}8$

A A A A H	$5A^4Hz^{4a+h}$
A A A B G	$+ 20A^3BGz^{3a+b+g}$
A A A C F	$+ 20A^3CFz^{3a+c+f}$
A A A D E	$+ 20A^3DEz^{3a+d+e}$
A A B B F	$+ 30A^2B^2Fz^{2a+2b+f}$
A A B C E	$+ 60A^2BCEz^{2a+b+c+e}$
A A B D D	$+ 30A^2BD^2z^{2a+b+2d}$
A A C C D	$+ 30A^2C^2Dz^{2a+2c+d}$
A B B B E	$+ 20AB^3Ez^{a+3b+e}$
A B B C D	$+ 60AB^2CDz^{a+2b+c+d}$
A B C C C	$+ 20ABC^3z^{a+b+3c}$
B B B B D	$+ 5B^4Dz^{4b+d}$
B B B C C	$+ 10B^3C^2z^{3b+2c}$

Anmerkung.

Dass die Werthe des * in $e^{12}\mathfrak{E}_{z^*}$ hier richtig bestimmt sind erhellet aus §. 70 c).

§. 89.

11. *Aufgabe.*

Für $(Az^a + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \ldots)^m = q^m$ unter der Bedingung eine Formel anzugeben, dafs unter m sowohl eine positive als negative, sowohl eine ganze als gebrochne Zahl gedacht werden darf.

Auflösung.

Es ist $q^m = A^m z^{ma} +$

$$^m\mathfrak{A}A^{m-1}z^{(m-1)a}\begin{cases} {}^1_a A z^* \\ +{}^2_a A z^* \\ +{}^3_a A z^* \\ +{}^4_a A z^* \\ +{}^5_a A z^* \\ \quad " \quad " \quad " \end{cases} + {}^m\mathfrak{B}A^{m-2}z^{(m-2)a}\begin{cases} {}^2_b B z^* \\ +{}^3_b B z^* \\ +{}^4_b B z^* \\ +{}^5_b B z^* \\ +{}^6_b B z^* \\ \quad " \quad " \quad " \end{cases}$$

$$+ {}^m\mathfrak{C}A^{m-3}z^{(m-3)a}\begin{cases} {}^3_c C z^* \\ +{}^4_c C z^* \\ +{}^5_c C z^* \\ +{}^6_c C z^* \\ +{}^7_c C z^* \\ \quad " \quad " \quad " \end{cases} + {}^m\mathfrak{D}A^{m-4}z^{(m-4)a}\begin{cases} {}^4_d D z^* \\ +{}^5_d D z^* \\ +{}^6_d D z^* \\ +{}^7_d D z^* \\ +{}^8_d D z^* \\ \quad " \quad " \quad " \end{cases}$$

u. s. w. $\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4 \ldots \\ B, & C, & D, & E \ldots\end{matrix}\right)$

Beweis.

Es sey $(Bz^b + Cz^c + Dz^d + \ldots)^m = Z$, so ist $q^m = (Az^a + Z)^m$, also $= A^m z^{ma} + {}^m\mathfrak{A}A^{m-1}z^{(m-1)a}Z^1 + {}^m\mathfrak{B}A^{m-2}z^{(m-2)a}Z^2 +$

$${}^m\mathfrak{C}A^{m-3}z^{(m-3)}Z^3 + \ldots$$

Da nun nach §. 87.

$$Z^1 = {}_a{}^1A_{z^*} + {}_a{}^2A_{z^*} + {}_a{}^3A_{z^*} + {}_a{}^4A_{z^*} + {}_a{}^5A_{z^*} + \ldots$$
$$Z^2 = {}_b{}^2B_{z^*} + {}_b{}^3B_{z^*} + {}_b{}^4B_{z^*} + {}_b{}^5B_{z^*} + {}_b{}^6B_{z^*} + \ldots$$
$$Z^3 = {}_c{}^3C_{z^*} + {}_c{}^4C_{z^*} + {}_c{}^5C_{z^*} + {}_c{}^6C_{z^*} + {}_c{}^7C_{z^*} + \ldots$$
$$Z^4 = {}_b{}^4D_{z^*} + {}_b{}^5D_{z^*} + {}_b{}^6D_{z^*} + {}_b{}^7D_{z^*} + {}_b{}^8D_{z^*} + \ldots$$
$$\text{“} \quad \text{“} \quad \text{“} \quad \text{“} \quad \text{“} \quad \text{“}$$
$$\binom{1, 2, 3, 4\ldots}{B, C, D, E\ldots}$$

so ist einleuchtend, dafs die gegebene Auflösung richtig ist, weil ihre Formel entsteht wenn man in der Formel für $(Az^a + Z)^m$ statt Z^1, Z^2, Z^3, Z^4, u. s. f. die hierfür eben entwickelten Werthe substituirt.

Zusatz.

Es ist $(Az^a + Bz^b + Cz^c + \ldots)^m : (n+1) =$

$$ {}^m\mathfrak{M}A^{(m-n)}z^{(m-n)a}\Big\{ + {}_n{}^n\mathfrak{N}_{z^*} + {}_n{}^{n+1}\mathfrak{N}_{z^*} + {}_n{}^{n+2}\mathfrak{N}_{z^*} + {}_n{}^{n+3}\mathfrak{N}_{z^*} \quad \text{“} \quad \text{“} \quad \text{“} $$

$$\binom{1, 2, 3\ldots}{B, C, D\ldots}$$

Beispiel.

Es soll $(Az^a + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \ldots)^{-5} = p^{-3}$ entwickelt werden.

* * *

Die hierhergehörige allgemeine Formel entsteht aus der Formel der Auflösung, wenn man darinn statt m, —3 setzt.

setzt. Um die Klassen zu entwickeln dient hier vorzüglich die lexicographische Involution:

"	B	B	B	B	B	B	B	B^1
"	B	B	B	B	B	B	C	2γ
"	B	B	B	B	B	D		3γ
"	B	B	B	B	C		C	4γ
"	B	B	B	B	E			
"	B	B	B	C	D			5γ
"	B	B	B	F				
"	B	B	C	C	C			
"	B	B	C	E				
"	B	B	D	D				6γ
"	B	B	G					
"	B	C	C	D				
"	B	C	F					
"	B	D	E					7γ
"	B	H						
"	C	C	C	C				
"	C	C	E					
"	C	D	D					
"	C	G						
"	D	F						
"	E	E						8γ
"	I							
"	"	"						

Nimmt man hieraus die einzelnen Klassen und giebt jeder Complexion den ihr zugehörigen Polynomialcoefficienten, so wird $p^{-5} =$

$$A^{-3}z^{-3a}+^{-3}\mathfrak{A}_A{}^{-4}z^{-4a}\begin{cases} Bz^{b}+^{-3}\mathfrak{B}\hat{A}^{-5}z^{-5a}\begin{cases} B^2z^{2b} \\ +2BCz^{b+c} \\ +2BDz^{b+d}+C^2z^{2c} \\ +2BEz^{b+e}+2CDz^{c+d} \\ \quad " \qquad " \end{cases} \\ +Cz^{c} \\ +Dz^{d} \\ +Ez^{e} \\ \quad " \end{cases}$$

$$+^{-3}\mathfrak{C}_A{}^{-6}z^{-6a}\begin{cases} B^3z^{3b} \\ +3B^2Cz^{2b+c} \\ +3B^2Dz^{2b+d}+3BC^2z^{b+2c} \\ +3B^2Ez^{2b+e}+6BCDz^{b+c+d}+C^3z^{3c} \\ \quad " \qquad " \qquad " \end{cases}$$

$$^{-3}\mathfrak{D}$$

$$+^{-3}\mathfrak{D}_A^{-7a}\begin{cases} B^a z^{a+b} \\ +4B^3 C z^{3b+c} \\ +4B^3 D z^{3b+d}+6B^2 C^2 z^{2b+2c} \\ +4B^3 E z^{3b+e}+12B^2 CD z^{2b+c+d}+4BC^3 z^{b+3c} \end{cases}$$

u. f. w. u. f. w.

Anmerkung.

Hat eine gegebene Reihe eine bestimmte Anzahl z. B. n+1 Glieder, so hat die höchste Union für den Zeiger $\binom{1,2,3,4\ldots n}{b,c,d,e\ldots p}$ die Summe n, die höchste Binion besitzt die Summe 2n, die höchste Ternion die Summe 3n u. s. w. Construirt man also in diesem Falle z. B. eine lexicographische Involution zur Summe 3n, so sind alle Binionen darinn unnütze, welche eine grösere Summe haben als 2n beträgt und alle Unionen sind unnütze, welchen eine grösere Summe zukömmt als n ausmacht. Es soll daher in der Folge noch eine Methode angegeben werden die lexicographische Involution so abzukürzen, dass sie bei einer begrenzten Reihe die unnützen Complexionen übergeht.

IV. Combinatorische Entwickelung der Produkte der Dignitäten mehrerer Reihen.

§. 90.

1. *Aufgabe.*

Es sind m Reihen, p, q, r, s u. s. w. gegeben, deren eine jede z enthält und die Form $a+bz+cz^2+dz^3+\ldots$ hat, es soll das Produkt der Dignitäten p^b, q^c, r^d, s^e u. s. f. bestimmt werden.

Auf-

Auflösung.

Es ist für den Zeiger

$$\left\{\begin{array}{lllll} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots \\ p^b \varkappa 1, & p^b \varkappa 2, & p^b \varkappa 3, & p^b \varkappa 4 \ldots & = \pi \\ q^c \varkappa 1, & q^c \varkappa 2, & q^c \varkappa 3, & q^c \varkappa 4 \ldots & = \varrho \\ r^d \varkappa 1, & r^d \varkappa 2, & r^d \varkappa 3, & r^d \varkappa 4 \ldots & = \sigma \\ s^e \varkappa 1, & s^e \varkappa 2 & s^e \varkappa 3, & s^e \varkappa 4 \ldots & = \tau \\ " & " & " & " & " \end{array}\right\}$$

$$\ldots s^e r^d q^c p^b = {}^{m}\mathcal{M}_{\ldots\tau\sigma\varrho\pi} + {}^{m+1}\mathcal{M}_{\ldots\tau\sigma\varrho\pi} z + {}^{m+2}\mathcal{M}_{\ldots\tau\sigma\varrho\pi} z^2 + {}^{m+3}\mathcal{M}_{\ldots\tau\sigma\varrho\pi} z^3 + \ldots.$$

Beweis.

Eine jede der Reihen p^b, q^c, r^d, s^e hat nach §. 82 und §. 84 die Form $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots$.

Man kann also setzen

$$p^b = p^b \varkappa 1 + p^b \varkappa 2.z + p^b \varkappa 3.z^2 + p^b \varkappa 4.z^3 + p^b \varkappa 5.z^4 + \ldots$$
$$q^c = q^c \varkappa 1 + q^c \varkappa 2.z + q^c \varkappa 3.z^2 + q^c \varkappa 4.z^3 + q^c \varkappa 5.z^4 + \ldots$$
$$r^d = r^d \varkappa 1 + r^d \varkappa 2.z + r^d \varkappa 3.z^2 + r^d \varkappa 4.z^3 + r^d \varkappa 5.z^4 + \ldots$$
$$s^e = s^e \varkappa 1 + s^e \varkappa 2.z + s^e \varkappa 3.z^2 + s^e \varkappa 4.z^3 + s^e \varkappa 5.z^4 + \ldots$$
$$" \quad " \quad " \quad " \quad "$$

Das Produkt dieser m Reihen erhält man aber, wenn man aus ihren Coefficienten so einen Zeiger bildet, wie in der Auflösung angegeben ist und hierfür die Klassen ${}^{m}\mathcal{M}$, ${}^{m+1}\mathcal{M}$, ${}^{m+2}\mathcal{M}$, ${}^{m+3}\mathcal{M}$ u. s. f. f. entwickelt und ${}^{m+1}\mathcal{M}$ mit z, ${}^{m+2}\mathcal{M}$ mit z^2, ${}^{m+3}\mathcal{M}$ mit z^3 mul-

multiplicirt u. s. w. (§. 74) folglich ist auch das in der Auflösung aufgestellte Produkt richtig.

1. *Zusatz.*

Es ist $\ldots s^e r^d q^c p^b 7^{(n+1)} = {}^{m+n}\mathcal{M}_{z^n}^{\ldots\tau\sigma\varrho\pi}$, also

$\ldots s^e r^d p^c q^b 7^{(n+1)\varkappa} = {}^{m+n}\mathcal{M}^{\ldots\tau\sigma\varrho\pi}$.

2. *Zusatz.*

$$\text{Es ist } p^b q^c = {}^2B^{\varrho\pi} + {}^3B^{\varrho\pi}_{z} + {}^4B^{\varrho\pi}_{z^2} + {}^5B^{\varrho\pi}_{z^3} + {}^6B^{\varrho\pi}_{z^4} + \ldots$$

$$= q^c\varkappa_1.p^b\varkappa_1 + \left.\begin{matrix} q^c\varkappa_1.p^b\varkappa_2 \\ + q^c\varkappa_2.p^b\varkappa_1 \end{matrix}\right\} z + \left.\begin{matrix} q^c\varkappa_1.p^b\varkappa_3 \\ + q^c\varkappa_2.p^b\varkappa_2 \\ + q^c\varkappa_3.p^b\varkappa_1 \end{matrix}\right\} z^2 + \left.\begin{matrix} q^c\varkappa_1.p^b\varkappa_4 \\ + q^c\varkappa_2.p^b\varkappa_3 \\ + q^c\varkappa_3.p^b\varkappa_2 \\ + q^c\varkappa_4.p^b\varkappa_1 \end{matrix}\right\} z^3 + \ldots$$

3. *Zusatz.*

$$\text{Es ist } r^d q^c p^b = {}^3C^{\sigma\varrho\pi} + {}^4C^{\sigma\varrho\pi}_{z} + {}^5C^{\sigma\varrho\pi}_{z^2} + {}^6C^{\sigma\varrho\pi}_{z^3} + {}^7C^{\sigma\varrho\pi}_{z^4} + {}^8C^{\sigma\varrho\pi}_{z^5} + \ldots$$

$$= r^d\varkappa_1.q^c\varkappa_1.p^b\varkappa_1 + \left.\begin{matrix} r^d\varkappa_1.q^c\varkappa_1.p^b\varkappa_2 \\ + r^d\varkappa_1.q^c\varkappa_2.p^b\varkappa_1 \\ + r^d\varkappa_2.q^c\varkappa_1.p^b\varkappa_1 \end{matrix}\right\} z + \left.\begin{matrix} r^d\varkappa_1.q^c\varkappa_1.p^b\varkappa_3 \\ + r^d\varkappa_1.q^c\varkappa_2.p^d\varkappa_2 \\ + r^d\varkappa_1.q^c\varkappa_3.p^b\varkappa_1 \\ + r^d\varkappa_2.q^c\varkappa_1.p^b\varkappa_2 \\ + r^d\varkappa_2.q^c\varkappa_2.p^b\varkappa_1 \\ + r^d\varkappa_3.q^c\varkappa_1.p^b\varkappa_1 \end{matrix}\right\} z^2$$

u. s. w. u. s. w.

1. *Anmerkung.*

Aus den letzten beiden Zusätzen wird hinreichend erhellen, wie leicht man die Produkte durch das

das Localzeichen $\varkappa$ ausdrücken kann. Werden in ſolchen Localausdrücken, die Coefficienten ſelbſt, für ihre Stellvertreter geſetzt, welches gar keine Schwierigkeiten macht, ſo hat man das Produkt vollſtändig entwickelt.

Beiſpiel. a).

Es ſey $p^2 = (a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \ldots)^2$

und $p^3 = (\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \ldots)^3$

Es ſoll $p^2 q^3$ vollſtändig entwickelt werden.

* * *

Hier iſt

$$p^2 = a^2 + 2abz + \left.\begin{matrix} 2ac \\ + b^2 \end{matrix}\right\} z^2 + \left.\begin{matrix} 2ad \\ + 2bc \end{matrix}\right\} z^3 + \left.\begin{matrix} 2ae \\ + 2bd \\ + c^2 \end{matrix}\right\} z^4 + \ldots$$

$$q^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta z + \left.\begin{matrix} 3\alpha^2\gamma \\ + 3\alpha\beta^2 \end{matrix}\right\} z^2 + \left.\begin{matrix} 3\alpha^2\delta \\ + 6\alpha\beta\gamma \\ + \beta^3 \end{matrix}\right\} z^3 + \left.\begin{matrix} 3\alpha\varepsilon^2 \\ + 6\alpha\beta\delta \\ + 3\alpha\gamma^2 \\ + 3\beta^2\gamma \end{matrix}\right\} z^4 + \ldots$$

und daher iſt nach dem zweiten Zuſatze

$$p^2 q^3 = \alpha^3 a^2 + \left.\begin{matrix} \alpha^3.2ab \\ + 3\alpha^2\beta.a^2 \end{matrix}\right\} z + \left.\begin{matrix} \alpha^3(2ac + b^2) \\ + 3\alpha^2\beta.2ab \\ + (3\alpha^2\gamma + 3\alpha\beta^2)a^2 \end{matrix}\right\} z^2 + \ldots$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha^3(2ad + 2bc) \\ + 3\alpha^2\beta(2ac + b^2) \\ + (3\alpha^2\gamma + 3\alpha\beta^2).2ab \\ + (3\alpha^2\delta + 6\alpha\beta\gamma + \beta^3)a^2 \end{matrix}\right\} z^3 + \ldots$$

§. 91.

a) Soll nur im allgemeinen die Form des Produkts $p^2 q^3$ angegeben alſo das Produkt nicht vollſtändig entwickelt werden, ſo muſs man p^2 und q^3 nur durch Klaſſenzeichen ausdrücken. (§. 82).

§. 91.

Es ist nicht nothwendig, dafs man um das Produkt der Dignitäten mehrerer Reihen zu erhalten, jedesmal das Gesuchte zuerst durch Localausdrücke bestimmt; es soll daher durch Beispiele noch eine andere Methode angegeben werden.

1. *Beispiel.*

Es soll p^4q^2 entwickelt werden, wobei angenommen wird, dafs $p^4 = (a + bz + cz^2 + dz^3 + \dots)^4$ und $q^2 = (\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \dots)^2$.

* * *

Hier ist für den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & \dots \\ a, & b, & c, & d, & \dots = \varrho\end{smallmatrix}\right)$,

$$p^4 = {}_b{}^4\overset{\pi}{D} + {}_b{}^5\overset{\pi}{D}_z + {}_b{}^6\overset{\pi}{D}_{z^2} + {}_b{}^7\overset{\pi}{D}_{z^3} + {}_b{}^8\overset{\pi}{D}_{z^4} + \dots$$

und für den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & \dots \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \dots = \pi\end{smallmatrix}\right)$, ist

$$q^2 = {}_b{}^2\overset{\varrho}{B} + {}_b{}^3\overset{\varrho}{B}_z + {}_b{}^4\overset{\varrho}{B}_{z^2} + {}_b{}^5\overset{\varrho}{B}_{z^3} + {}_b{}^6\overset{\varrho}{B}_{z^4} + \dots$$

Aus diesem Grunde ist für den Zeiger

$$\left\{\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3, & \dots \\ {}_b{}^4\overset{\pi}{D}, & {}_b{}^5\overset{\pi}{D}, & {}_b{}^6\overset{\pi}{D}, & \dots = \sigma \\ {}_b{}^2\overset{\varrho}{B}, & {}_b{}^3\overset{\varrho}{B}, & {}_b{}^4\overset{\varrho}{B}, & \dots = \tau\end{smallmatrix}\right\}$$

$$p^4q^2 = {}^{\tau\sigma}B + {}^{\tau\sigma}B_z + {}^{\tau\sigma}B_{z^2} + {}^{\tau\sigma}B_{z^3} + {}^{\tau\sigma}B_{z^4} + {}^{\tau\sigma}B_{z^5} + \dots$$

Ent-

Entwickelt man dieſen Ausdruck für ſeinen Zeiger, ſo erhält man

$$p^4q^2 = b^2\overset{\varrho}{B}.b^4\overset{\pi}{D} + b^2\overset{\varrho}{B}.b^5\overset{\pi}{D} \left.\begin{matrix} z + b^2\overset{\varrho}{B}.b^6\overset{\pi}{D} \\ b^3\overset{\varrho}{B}.b^4\overset{\pi}{D} \end{matrix}\right\} z^2 + \cdots \left.\begin{matrix} \\ + b^3\overset{\varrho}{B}.b^5\overset{\pi}{D} \\ + b^4\overset{\varrho}{B}.b^4\overset{\pi}{D} \end{matrix}\right\}$$

$$\left(\begin{matrix} 1, 2, 3, 4, \ldots \\ a, b, c, d, \ldots \end{matrix} = \pi\right) \quad \left(\begin{matrix} 1, 2, 3, 4, \ldots \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \end{matrix} = \varrho\right)$$

2. *Beiſpiel.*

Es ſoll das Produkt $p^4 . q^2 . r^3$ angegeben werden, wobei $r = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \cdots$ geſetzt wird und unter p und q wieder die nämlichen Reihen gedacht werden, welche ſie im erſten Beiſpiele bezeichneten

* * *

Es iſt

$$p^4 = b^4\overset{\pi}{D} + b^5\overset{\pi}{D}z + b^6\overset{\pi}{D}z^2 + b^7\overset{\pi}{D}z^3 + b^8\overset{\pi}{D}z^4 + \cdots$$
$$\left(\begin{matrix} 1, 2, 3, 4, \ldots \\ a, b, c, d, \ldots \end{matrix} = \pi\right)$$

$$q^2 = b^2\overset{\varrho}{B} + b^3\overset{\varrho}{B}z + b^4\overset{\varrho}{B}z^2 + b^5\overset{\varrho}{B}z^3 + b^6\overset{\varrho}{B}z^4 + \cdots$$
$$\left(\begin{matrix} 1, 2, 3, 4, \ldots \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \end{matrix} = \varrho\right)$$

$$p^3 = c^3\overset{\upsilon}{C} + c^4\overset{\upsilon}{C}z + c^5\overset{\upsilon}{C}z^2 + c^6\overset{\upsilon}{C}z^3 + c^7\overset{\upsilon}{C}z^4 + \cdots$$
$$\left(\begin{matrix} 1, 2, 3, 4, \ldots \\ \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \ldots \end{matrix} = \upsilon\right)$$

folglich ist das Produkt

$$p^{\alpha}q^{2}r^{3} = {}^{3}C^{\varphi\tau\sigma} + {}^{4}C_{z}^{\varphi\tau\sigma} + {}^{5}C_{z^2}^{\varphi\tau\sigma} + {}^{6}C_{z^3}^{\varphi\tau\sigma} + {}^{7}C_{z^4}^{\varphi\tau\sigma} + \ldots$$

$$\left\{\begin{array}{l} {}_{\mathfrak{b}}{}^{4}\mathrm{D}^{\pi}, {}_{\mathfrak{b}}{}^{5}\mathrm{D}^{\pi}, {}_{\mathfrak{b}}{}^{6}\mathrm{D}^{\pi}, {}_{\mathfrak{b}}{}^{7}\mathrm{D}^{\pi}, \ldots = \sigma \\ {}_{\mathfrak{b}}{}^{2}\mathrm{B}^{\varrho}, {}_{\mathfrak{b}}{}^{3}\mathrm{B}^{\varrho}, {}_{\mathfrak{b}}{}^{4}\mathrm{B}^{\varrho}, {}_{\mathfrak{b}}{}^{5}\mathrm{B}^{\varrho}, \ldots = \tau \\ {}_{\mathfrak{c}}{}^{3}\mathrm{C}^{\upsilon}, {}_{\mathfrak{c}}{}^{4}\mathrm{C}^{\upsilon}, {}_{\mathfrak{c}}{}^{5}\mathrm{C}^{\upsilon}, {}_{\mathfrak{c}}{}^{6}\mathrm{C}^{\upsilon}, \ldots = \varphi \end{array}\right\}$$

$$= {}_{\mathfrak{c}}{}^{3}\mathrm{C}^{\upsilon} . {}_{\mathfrak{b}}{}^{2}\mathrm{B}^{\varrho} . {}_{\mathfrak{d}}{}^{4}\mathrm{D}^{\pi} + {}_{\mathfrak{c}}{}^{3}\mathrm{C}^{\upsilon} . {}_{\mathfrak{b}}{}^{2}\mathrm{B}^{\varrho} . {}_{\mathfrak{d}}{}^{5}\mathrm{D}^{\pi} \Big]_{z} +$$
$$+ {}_{\mathfrak{c}}{}^{3}\mathrm{C}^{\upsilon} . {}_{\mathfrak{b}}{}^{3}\mathrm{B}^{\varrho} . {}_{\mathfrak{d}}{}^{4}\mathrm{D}^{\pi}$$
$$+ {}_{\mathfrak{c}}{}^{4}\mathrm{C}^{\upsilon} . {}_{\mathfrak{b}}{}^{2}\mathrm{B}^{\varrho} . {}_{\mathfrak{d}}{}^{4}\mathrm{D}^{\pi} \Big]$$

$$\left.\begin{array}{l} + {}_{\mathfrak{c}}{}^{3}\mathrm{C}^{\upsilon} . {}_{\mathfrak{b}}{}^{2}\mathrm{B}^{\varrho} . {}_{\mathfrak{d}}{}^{6}\mathrm{D}^{\pi} \\ + {}_{\mathfrak{c}}{}^{3}\mathrm{C}^{\upsilon} . {}_{\mathfrak{b}}{}^{3}\mathrm{B}^{\varrho} . {}_{\mathfrak{d}}{}^{5}\mathrm{D}^{\pi} \\ + {}_{\mathfrak{c}}{}^{3}\mathrm{C}^{\upsilon} . {}_{\mathfrak{b}}{}^{4}\mathrm{B}^{\varrho} . {}_{\mathfrak{d}}{}^{4}\mathrm{D}^{\pi} \\ + {}_{\mathfrak{c}}{}^{4}\mathrm{C}^{\upsilon} . {}_{\mathfrak{b}}{}^{2}\mathrm{B}^{\varrho} . {}_{\mathfrak{d}}{}^{5}\mathrm{D}^{\pi} \\ + {}_{\mathfrak{c}}{}^{4}\mathrm{C}^{\upsilon} . {}_{\mathfrak{b}}{}^{3}\mathrm{B}^{\varrho} . {}_{\mathfrak{d}}{}^{4}\mathrm{D}^{\pi} \\ + {}_{\mathfrak{c}}{}^{5}\mathrm{C}^{\upsilon} . {}_{\mathfrak{b}}{}^{2}\mathrm{B}^{\varrho} . {}_{\mathfrak{d}}{}^{4}\mathrm{D}^{\pi} \end{array}\right\} z^{2} + \ldots$$

$$\left(\begin{smallmatrix} 1, 2, 3, 4 \ldots \\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots \end{smallmatrix} = \pi\right) \left(\begin{smallmatrix} 1, 2, 3, 4 \ldots \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots \end{smallmatrix} = \varrho\right) \left(\begin{smallmatrix} 1, 2, 3, 4 \ldots \\ \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots \end{smallmatrix} = \upsilon\right)$$

1. An-

1. *Anmerkung. a)*

Um die Produkte $p^a q^2$ (1. Beisp.) und $p^a q^2 r^3$ (2. Beisp.) vollständig zu entwickeln, hat man nur nöthig in dem letzten Ausdrucke der für ein jedes Produkt angegeben ist, die Klassen für die darunter stehenden Zeiger zu evolviren.

§. 92.

2. *Aufgabe.*

Es soll die Form des Produkts der m Dignitäten p^b, q^c, r^d, s^e u. s. w. angegeben werden, unter der Voraussetzung, dass eine jede der Reihen p, q, r u. s. f. die Form $az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots$ hat.

a) Für Denjenigen der in der Entwickelung solcher Klassen, als $\overset{n}{C}$, nicht sehr geübt ist, möchte diese Entwickelung, wenn sie für einen solchen Zeiger rein combinatorisch geschehn sollte, dessen Elemente selbst wieder Klassen sind, mit Schwierigkeiten verbunden seyn; er würde sich also genöthigt sehn, jene Klassen erst in Zahlen anzugeben und hierauf für die Zahlenelemente die dem Zeiger nach damit correspondirenden Klassenzeichen zu setzen, folglich die Klassen arithmetisch-combinatorisch zu evolviren. Einem Ungeübten ist also auf jeden Fall zu rathen von der im 90ten Paragraphe angegebenen Methode Gebrauch zu machen, weil die Evolution der Klassen durch Localzeichen eben so leicht ist als die Entwickelung durch Zahlen und weil ein jedes Localzeichen allemal bestimmt nachweiset worauf es sich bezieht. Aus diesem Grunde ist überhaupt der Gebrauch der Localzeichen sehr zu empfehlen, daher auch in der Folge noch häufig die Localformeln vorkommen werden.

Auflösung.

Es ist

$$..s^e r^d q^c p^b = ({}^{..\tau\sigma\varrho\pi}\mathcal{M}_{z^0} + {}^{m+1\ ..\tau\sigma\varrho\pi}\mathcal{M}_{z^1} + {}^{m+2\ ..\tau\sigma\varrho\pi}\mathcal{M}_{z^2} + {}^{m+3\ ..\tau\sigma\varrho\pi}\mathcal{M}_{z^3} + \ldots.)_{z^{b+c+d+e+\cdots}}$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots \\ p^b\varkappa 1, & p^b\varkappa 2, & p^b\varkappa 3, & p^b\varkappa 4 \ldots & = \pi \\ q^c\varkappa 1, & q^c\varkappa 2, & q^c\varkappa 3, & q^c\varkappa 4 \ldots & = \varrho \\ r^d\varkappa 1, & r^d\varkappa 2, & r^d\varkappa 3, & r^d\varkappa 4 \ldots & = \sigma \\ s^e\varkappa 1, & s^e\varkappa 2 & s^e\varkappa 3, & s^e\varkappa 4 \ldots & = \tau \\ \text{''} & \text{''} & \text{''} & \text{''} & \text{''} \end{array}\right\}$$

Beweis.

Nach §. 83 und §. 85 hat eine jede der Reihen p^b, q^c, r^d, u. s. f. die Form $(Az^0 + Bz^1 + Cz^2 + Dz^3 + ..)z^m$ so dafs

$$p^b = (p^b\varkappa 1.z^0 + p^b\varkappa 2.z^1 + p^b\varkappa 3.z^2 + p^b\varkappa 4.z^3 + \ldots)z^b$$
$$q^c = (q^c\varkappa 1.z^0 + q^c\varkappa 2.z^1 + q^c\varkappa 3.z^2 + q^c\varkappa 4.z^3 + \ldots)z^c$$
$$r^d = (r^d\varkappa 1.z^0 + r^d\varkappa 2.z^1 + r^d\varkappa 3.z^2 + r^d\varkappa 4.z^3 + \ldots)z^d$$
$$\text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''}$$

Macht man sich also für die Coefficienten dieser Reihen den in der Auflösung angegebenen Zeiger, so erhält man auch wegen §. 90 das in der Auflösung angegebene Produkt.

Zusatz.

Es ist $(..s^e r^d q^c p^b) \varkappa (n+1) = {}^{m+n\ ..\tau\sigma\varrho\pi}\mathcal{M}$

§. 93.

3. *Aufgabe.*

Es ſoll im allgemeinen die Form des Produkts folgender m Reihen angegeben werden.

$$p^{\nu} = (Az^{\mu} + Bz^{\mu+\delta} + Cz^{\mu+2\delta} + Dz^{\mu+3\delta} + Ez^{\mu+4\delta} + \ldots)^{\nu}$$
$$q^{n} = (az^{\nu} + bz^{\nu+\delta} + cz^{\nu+2\delta} + dz^{\nu+3\delta} + ez^{\nu+4\delta} + \ldots)^{n}$$
$$r^{l} = (\mathfrak{A}z^{\pi} + \mathfrak{B}z^{\pi+\delta} + \mathfrak{C}z^{\pi+2\delta} + \mathfrak{D}z^{\pi+3\delta} + \mathfrak{E}z^{\pi+4\delta} + \ldots)^{l}$$
$$\text{“} \quad \text{“} \quad \text{“} \quad \text{“} \quad \text{“} \quad \text{“} \quad \text{“}$$

Auflöſung.

Es iſt, wenn man $\nu\mu + n\nu + l\pi + \cdots = \Sigma$ ſetzt,

$$\ldots r^{l}q^{n}p^{\nu} = {}^{m}\mathcal{M}_{z}^{\ldots\upsilon\tau\sigma}{}^{\Sigma} + {}^{m+1}\mathcal{M}_{z}^{\ldots\upsilon\tau\sigma}{}^{\Sigma+\delta} + {}^{m+2}\mathcal{M}_{z}^{\ldots\upsilon\tau\sigma}{}^{\Sigma+2\delta} + {}^{m+3}\mathcal{M}_{z}^{\ldots\upsilon\tau\sigma}{}^{\Sigma+3\delta} + \ldots$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & 4 & \ldots \\ p^{\nu}\varkappa 1, & p^{\nu}\varkappa 2, & p^{\nu}\varkappa 3, & p^{\nu}\varkappa 4, & \ldots = \sigma \\ q^{n}\varkappa 1, & q^{n}\varkappa 2, & q^{n}\varkappa 3, & q^{n}\varkappa 4, & \ldots = \tau \\ r^{l}\varkappa 1, & r^{l}\varkappa 2, & r^{l}\varkappa 3, & r^{l}\varkappa 4, & \ldots = \upsilon \\ \text{“} & \text{“} & \text{“} & \text{“} & \text{“} \end{array}\right\}$$

Beweis.

Die m Reihen p^{ν}, q^{n}, r^{l} u. ſ. w. laſſen ſich nach §. 86 und 87 ſo ausdrücken:

$$p^{\nu} = p^{\nu}\varkappa 1.z^{\nu\mu} + p^{\nu}\varkappa 2.z^{\nu\mu+\delta} + p^{\nu}\varkappa 3.z^{\nu\mu+2\delta} + p^{\nu}\varkappa 4.z^{\nu\mu+3\delta} + \ldots$$
$$q^{n} = q^{n}\varkappa 1.z^{n\nu} + q^{n}\varkappa 2.z^{n\nu+\delta} + q^{n}\varkappa 3.z^{n\nu+2\delta} + q^{n}\varkappa 4.z^{n\nu+3\delta} + \ldots$$
$$r^{l} = r^{l}\varkappa 1.z^{l\pi} + r^{l}\varkappa 2.z^{l\pi+\delta} + r^{l}\varkappa 3.z^{l\pi+2\delta} + r^{l}\varkappa 4.z^{l\pi+3\delta} + \ldots$$
$$\text{“} \quad \text{“} \quad \text{“} \quad \text{“} \quad \text{“} \quad \text{“}$$

Vergleicht man die Form der Ausdrücke für p^{ν}, q^{n}, r^{l}, u. ſ. f. mit den Reihen der Aufgabe des §. 76, ſo fällt ſogleich in die Augen, daſs dieſe Reihen ſo durch ihre Coefficienten und durch die Exponenten, μ, ν, π u. ſ. f. beſtimmt werden als die Ausdrücke für p^{ν}, q^{n}, r^{l} u. ſ. w. durch ihren Coefficienten und durch die Exponenten $\nu\mu$, $n\nu$, $l\pi$ u. ſ. f. beſtimmt ſind. Aus dieſem Grunde kann ſich auch der allgemeine Ausdruck für das Produkt $\ldots r^{l}q^{n}p^{\nu}$ von dem allgemeinen Ausdrucke für das Produkt der Reihen der Aufgabe des §. 76 nur durch den Zeiger und auſserdem nur noch dadurch unterſcheiden, daſs bei ihm Σ nicht gleich $\mu+\nu+\pi+\cdots$, ſondern gleich $\nu\mu+n\nu+l\pi+\cdots$ iſt. Da nun zwiſchen dem allgemeinen Ausdrucke für das Produkt $\ldots r^{l}q^{n}p^{\nu}$, welchen die Auflöſung giebt, und zwiſchen dem allgemeinen Ausdrucke der m Reihen der Aufgabe des §. 76 ſich auch nur der angegebene Unterſchied befindet, ſo iſt einleuchtend daſs das Produkt $\ldots r^{l}q^{n}p^{\nu}$ durch die Auflöſung richtig beſtimmt iſt.

Zuſatz.

Es iſt $(\ldots r^{l}q^{n}p^{\nu})\,7\,(t+1) = {}^{\ldots\upsilon\tau\sigma}_{m+t}\mathcal{M}_{z^{\Sigma+t\delta}}$, alſo

$$(\ldots r^{l}q^{n}p^{\nu})\,7\,(t+1)\,\varkappa = {}^{\ldots\upsilon\tau\sigma}_{m+t}\mathcal{M}.$$

Beiſpiel.

Es ſey

$$p^{4} = (Az^{\mu} + Bz^{\mu+\delta} + Cz^{\mu+2\delta} + Dz^{\mu+3\delta} + \ldots)^{4}$$
$$q^{3} = (az^{\nu} + bz^{\nu+\delta} + cz^{\nu+2\delta} + dz^{\nu+3\delta} + \ldots)^{3}$$
$$r^{2} = (\mathfrak{A}z^{\pi} + \mathfrak{B}z^{\pi+\delta} + \mathfrak{C}z^{\pi+2\delta} + \mathfrak{D}z^{\pi+3\delta} + \ldots)^{2};$$

es ſoll das dritte Glied des Produkts $r^2 q^3 p^4$ allgemein dargeſtellt werden.

* * *

Hier iſt $l=2$, $n=3$, $v=4$, $t=2$, $m=3$, $\mathcal{M}=C$, folglich das geſuchte Glied, wenn $4\mu+3\nu+2\pi+2\delta = \Delta$ geſetzt wird,

$$= {}^{5}C_{z}^{\Delta}{}^{\upsilon\tau\sigma} = \begin{Bmatrix} 1, & 2, & 3, \ldots \\ p^4\varkappa_1, & p^4\varkappa_2, & p^4\varkappa_3 \ldots = \sigma \\ q^3\varkappa_1, & q^3\varkappa_2, & q^3\varkappa_3, \ldots = \tau \\ r^2\varkappa_1, & r^2\varkappa_2, & r^2\varkappa_3, \ldots = \upsilon \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r^2\varkappa_1.q^3\varkappa_1.p^4\varkappa_3 \\ +r^2\varkappa_1.q^3\varkappa_2.p^4\varkappa_2 \\ +r^2\varkappa_1.q^3\varkappa_3.p^4\varkappa_1 \\ +r^2\varkappa_2.q^3\varkappa_1.p^4\varkappa_2 \\ +r^2\varkappa_2.q^3\varkappa_2.p^4\varkappa_1 \\ +r^2\varkappa_3.q^3\varkappa_1.p^4\varkappa_1 \end{Bmatrix}_{z}^{\Delta}$$

Es iſt aber

$$p^4 = {}_{\delta}{}^{4}\overset{\varphi}{D}_{z}4\mu + {}_{\delta}{}^{5}\overset{\varphi}{D}_{z}4\mu+\delta + {}_{\delta}{}^{6}\overset{\varphi}{D}_{z}4\mu+2\delta + \ldots$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \\ A, & B, & C, & D \ldots \end{matrix} = \varphi\right)$$

$$q^3 = {}_{c}{}^{3}\overset{\chi}{C}_{z}3\nu + {}_{c}{}^{4}\overset{\chi}{C}_{z}3\nu+\delta + {}_{c}{}^{5}\overset{\chi}{C}_{z}3\nu+2\delta + \ldots$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \\ a, & b, & c, & d \ldots \end{matrix} = \chi\right)$$

$$r^2 = {}_{b}{}^{2}\overset{\psi}{B}_{z}2\pi + {}_{b}{}^{3}\overset{\psi}{B}_{z}2\pi+\delta + {}_{b}{}^{4}\overset{\psi}{B}_{z}2\pi+2\delta + \ldots$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, \ldots \\ \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D}, \ldots \end{matrix} = \psi\right).$$

daher ist auch

$$r^2 q^3 p^4 = \left.\begin{array}{l} {}_{\mathfrak{b}}{}^{2}\overset{\Psi}{\mathfrak{B}} \cdot {}_{\mathfrak{c}}{}^{3}\overset{\chi}{\mathfrak{C}} \cdot {}_{\mathfrak{d}}{}^{6}\overset{\varphi}{\mathfrak{D}} \\ + {}_{\mathfrak{b}}{}^{2}\overset{\Psi}{\mathfrak{B}} \cdot {}_{\mathfrak{c}}{}^{4}\overset{\chi}{\mathfrak{C}} \cdot {}_{\mathfrak{d}}{}^{5}\overset{\varphi}{\mathfrak{D}} \\ + {}_{\mathfrak{b}}{}^{2}\overset{\Psi}{\mathfrak{B}} \cdot {}_{\mathfrak{c}}{}^{5}\overset{\chi}{\mathfrak{C}} \cdot {}_{\mathfrak{d}}{}^{4}\overset{\varphi}{\mathfrak{D}} \\ + {}_{\mathfrak{b}}{}^{3}\overset{\Psi}{\mathfrak{B}} \cdot {}_{\mathfrak{c}}{}^{3}\overset{\chi}{\mathfrak{C}} \cdot {}_{\mathfrak{d}}{}^{5}\overset{\varphi}{\mathfrak{D}} \\ + {}_{\mathfrak{b}}{}^{3}\overset{\Psi}{\mathfrak{B}} \cdot {}_{\mathfrak{c}}{}^{4}\overset{\chi}{\mathfrak{C}} \cdot {}_{\mathfrak{d}}{}^{4}\overset{\varphi}{\mathfrak{D}} \\ + {}_{\mathfrak{b}}{}^{4}\overset{\Psi}{\mathfrak{B}} \cdot {}_{\mathfrak{c}}{}^{3}\overset{\chi}{\mathfrak{C}} \cdot {}_{\mathfrak{d}}{}^{4}\overset{\varphi}{\mathfrak{D}} \end{array}\right\}_{z^{4\mu+3\nu+2\pi+2\vartheta}}$$

§. 94.

4. *Aufgabe.*

Es soll unter der Voraussetzung, dass k, r, v ganze positive Zahlen sind, die Form des Produkts folgender m Reihen angegeben werden;

$$p^k = (az^a + bz^b + cz^c + dz^d + ez^e + fz^f + \ldots)^k$$
$$q^r = (Az^A + Bz^B + Cz^C + Dz^D + Ez^E + Fz^F + \ldots)^r$$
$$s^v = (\alpha z^\alpha + \beta z^\beta + \gamma z^\gamma + \delta z^\delta + \varepsilon z^\varepsilon + \varphi z^\varphi + \ldots)^v$$
$$\text{“} \qquad \text{“} \qquad \text{“} \qquad \text{“} \qquad \text{“}$$

Es ist

$$\ldots s^v q^r p^k = {}^{m}\mathcal{M}_{z^*}^{\ldots\sigma\varrho\pi} + {}^{m+1}\mathcal{M}_{z^*}^{\ldots\sigma\varrho\pi} + {}^{m+2}\mathcal{M}_{z^*}^{\ldots\sigma\varrho\pi} + {}^{m+3}\mathcal{M}_{z^*}^{\ldots\sigma\varrho\pi} + \ldots$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1, \quad 2, \quad 3 \ldots \\ p^k \varkappa_1, \; p^k \varkappa_2, \; p^k \varkappa_3, \ldots = \pi \\ q^r \varkappa_1, \; q^r \varkappa_2, \; q^r \varkappa_3, \ldots = \varrho \\ s^v \varkappa_1, \; s^v \varkappa_2, \; s^v \varkappa_3, \ldots = \sigma \\ \text{“} \qquad \text{“} \qquad \text{“} \qquad \text{“} \end{array}\right\}$$

Be-

Beweis.

Nach §. 88. ist

$$p^k = p^k\varkappa_1.z^* + p^k\varkappa_2.z^* + p^k\varkappa_3.z^* + p^k\varkappa_4,z^* + \ldots,$$
$$q^r = q^r\varkappa_1.z^* + q^r\varkappa_2.z^* + q^r\varkappa_3.z^* + q^r\varkappa_4.z^* + \ldots,$$
$$s^v = s^v\varkappa_1,z^* + s^v\varkappa_2.z^* + s^v\varkappa_3.z^* + s^v\varkappa_4.z^* + \ldots,$$
$$\text{“} \quad \text{“} \quad \text{“} \quad \text{“} \quad \text{“}$$

folglich ist auch nach §. 77 die Form des gesuchten Produkts die in der Auflösung angegebene.

Zusatz.

Es ist $(\ldots s^v q^r p^k) \nabla (n+1) = {}^{\ldots\sigma\varrho\pi}_{m+n}\mathcal{M}_{z^*}$, also

$$(\ldots s^v q^r p^k) \nabla (n+1)\varkappa = {}^{\ldots\sigma\varrho\pi}_{m+n}\mathcal{M}.$$

Beispiel.

Das vierte Glied folgender drei Reihen zu bestimmen:

$$p^2 = (az^a + bz^b + cz^c + dz^d + ez^e + fz^f + \ldots)^2,$$
$$q^4 = (Az^A + Bz^B + Cz^C + Dz^D + Ez^E + Fz^F + \ldots)^4,$$
$$s^5 = (\mathfrak{A}z^{\mathfrak{a}} + \mathfrak{B}z^{\mathfrak{b}} + \mathfrak{C}z^{\mathfrak{c}} + \mathfrak{D}z^{\mathfrak{d}} + \mathfrak{E}z^{\mathfrak{e}} + \mathfrak{F}z^{\mathfrak{f}} + \ldots)^5,$$

* * *

Das gesuchte Glied ist gleich

$$
{}^{\sigma\varrho\pi}{}^{6}C_{z^*}
\left\{\begin{array}{c} 1,\ 2,\ 3\ \ldots \\ p^2\varkappa_1, p^2\varkappa_2, p^2\varkappa_3, \ldots = \pi \\ q^4\varkappa_1, q^4\varkappa_2, q^4\varkappa_3, \ldots = \varrho \\ s^5\varkappa_1, s^5\varkappa_2, s^5\varkappa_3, \ldots = \sigma \end{array}\right\}
=
\left\{\begin{array}{r} s^5\varkappa_1 . q^4\varkappa_1 . p^2\varkappa_4 \\ + s^5\varkappa_1 . q^4\varkappa_2 . p^2\varkappa_3 \\ + s^5\varkappa_1 . q^4\varkappa_3 . p^2\varkappa_2 \\ + s^5\varkappa_1 . q^4\varkappa_4 . p^2\varkappa_1 \\ + s^5\varkappa_2 . q^4\varkappa_1 . p^2\varkappa_3 \\ + s^5\varkappa_2 . q^4\varkappa_2 . p^2\varkappa_2 \\ + s^5\varkappa_2 . q^4\varkappa_3 . p^2\varkappa_1 \\ + s^5\varkappa_3 . q^4\varkappa_1 . p^2\varkappa_2 \\ + s^5\varkappa_3 . q^4\varkappa_2 . p^2\varkappa_1 \\ + s^5\varkappa_4 . q^4\varkappa_1 . p^2\varkappa_1 \end{array}\right\} z^*
$$

Es ist aber (§. 88)

$$
p^2 = {}_{\mathfrak{b}}{}^{2}\overset{\tau}{\mathfrak{B}}_{z^*} + {}_{\mathfrak{b}}{}^{3}\overset{\tau}{\mathfrak{B}}_{z^*} + {}_{\mathfrak{b}}{}^{4}\overset{\tau}{\mathfrak{B}}_{z^*} + {}_{\mathfrak{b}}{}^{5}\overset{\tau}{\mathfrak{B}}_{z^*} + \ldots,
\qquad
\left(\begin{array}{c} 1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots \\ a,\ b,\ c,\ d\ldots = \tau \end{array}\right)
$$

$$
q^4 = {}_{\mathfrak{b}}{}^{4}\overset{\upsilon}{\mathfrak{D}}_{z^*} + {}_{\mathfrak{b}}{}^{5}\overset{\upsilon}{\mathfrak{D}}_{z^*} + {}_{\mathfrak{b}}{}^{6}\overset{\upsilon}{\mathfrak{D}}_{z^*} + {}_{\mathfrak{b}}{}^{7}\overset{\upsilon}{\mathfrak{D}}_{z^*} + \ldots,
\qquad
\left(\begin{array}{c} 1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots \\ A,\ B,\ C,\ D\ldots = \upsilon \end{array}\right)
$$

$$
s^5 = {}_{\mathfrak{e}}{}^{5}\overset{\varphi}{\mathfrak{E}}_{z^*} + {}_{\mathfrak{e}}{}^{6}\overset{\varphi}{\mathfrak{E}}_{z^*} + {}_{\mathfrak{e}}{}^{7}\overset{\varphi}{\mathfrak{E}}_{z^*} + {}_{\mathfrak{e}}{}^{8}\overset{\varphi}{\mathfrak{E}}_{z^*} + \ldots,
\qquad
\left(\begin{array}{c} 1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots \\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D}\ldots = \varphi \end{array}\right)
$$

daher

daher ist auch

$$
\begin{aligned}
s^5 q^4 p^2 74 = {} & {}_e^{\varphi}E^{5}_{\cdot\mathfrak{d}}{}^{\upsilon}D^{4}_{\cdot\mathfrak{b}}{}^{\tau}B^{5} \\
& + {}_e^{\varphi}E^{5}_{\cdot\mathfrak{d}}{}^{\upsilon}D^{5}_{\cdot\mathfrak{b}}{}^{\tau}B^{4} \\
& + {}_e^{\varphi}E^{5}_{\cdot\mathfrak{d}}{}^{\upsilon}D^{6}_{\cdot\mathfrak{b}}{}^{\tau}B^{3} \\
& + {}_e^{\varphi}E^{5}_{\cdot\mathfrak{d}}{}^{\upsilon}D^{7}_{\cdot\mathfrak{b}}{}^{\tau}B^{2} \\
& + {}_e^{\varphi}E^{6}_{\cdot\mathfrak{d}}{}^{\upsilon}D^{4}_{\cdot\mathfrak{b}}{}^{\tau}B^{4} \\
& + {}_e^{\varphi}E^{6}_{\cdot\mathfrak{d}}{}^{\upsilon}D^{5}_{\cdot\mathfrak{b}}{}^{\tau}B^{3} \\
& + {}_e^{\varphi}E^{6}_{\cdot\mathfrak{d}}{}^{\upsilon}D^{6}_{\cdot\mathfrak{b}}{}^{\tau}B^{2} \\
& + {}_e^{\varphi}E^{7}_{\cdot\mathfrak{d}}{}^{\upsilon}D^{4}_{\cdot\mathfrak{b}}{}^{\tau}B^{3} \\
& + {}_e^{\varphi}E^{7}_{\cdot\mathfrak{d}}{}^{\upsilon}D^{5}_{\cdot\mathfrak{b}}{}^{\tau}B^{2} \\
& + {}_e^{\varphi}E^{8}_{\cdot\mathfrak{d}}{}^{\upsilon}D^{4}_{\cdot\mathfrak{b}}{}^{\tau}B^{2}
\end{aligned}
\Big| z^*
$$

Anmerkung.

Die vollständige Entwickelung dieses ganzen Ausdrucks ist leicht, wie man aus der Darstellung des Werthes für ${}_e^{\varphi}E^{5}_{\cdot\mathfrak{d}}{}^{\upsilon}D^{4}_{\cdot\mathfrak{b}}{}^{\tau}B^{5} z^*$ deutlich sehn wird:

Es

Es ist nämlich $e^{5}\overset{\varphi}{E} = \mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{5}$

$$\mathfrak{d}^{4}\overset{\upsilon}{D} = AAAA = A^{4}$$

$$\mathfrak{b}^{5}\overset{\tau}{B} = \mathfrak{a}\,ad, \mathfrak{a}\,bc$$

folglich $e^{5}\overset{\varphi}{E} \cdot \mathfrak{d}^{4}\overset{\upsilon}{D} \cdot \mathfrak{b}^{5}\overset{\tau}{B} = \mathfrak{a}\mathfrak{A}^{5}A^{4}ad + \mathfrak{a}\mathfrak{A}^{5}A^{4}bc$

also $e^{5}\overset{\varphi}{E} \cdot \mathfrak{d}^{4}\overset{\upsilon}{D} \cdot \mathfrak{b}^{5}\overset{\tau}{B}{}_{z^{*}} = \mathfrak{a}\mathfrak{A}^{5}A^{4}adz^{5\alpha+4\delta+\alpha+d} + \mathfrak{a}\mathfrak{A}^{5}A^{4}bcz^{5\alpha+4\delta+\beta+c}$

§. 95.

5. Aufgabe.

Die Form des Produkts $p^{k}q^{r}s^{v}$ unter der Voraussetzung anzugeben, dafs unter k, r, v jede ganze und gebrochne, positive und negative Zahl gedacht werden kann. *a*).

Auflösung.

Es ist

$$\ldots s^{v}q^{r}s^{k} = {}^{m}\mathcal{M}_{+}^{..\sigma\varrho\pi}\ {}^{m+1}\mathcal{M}_{+}^{..\sigma\varrho\pi}\ {}^{m+2}\mathcal{M}_{+}^{..\sigma\varrho\pi}\ {}^{m+3}\mathcal{M}_{+}^{..\sigma\varrho\pi}\ {}^{m+4}\mathcal{M}_{+}^{..\sigma\varrho\pi} \ldots\ldots$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 3, .. & \\ p^{k}/1, & p^{k}/2, & p^{k}/3, .. & = \pi \\ q^{r}/1, & q^{r}/2, & q^{r}/3, .. & = \varrho \\ s^{v}/1, & s^{v}/2, & s^{v}/3, .. & = \sigma \\ \prime\prime & \prime\prime & \prime\prime & \prime\prime \end{array}\right\}$$

Be-

a) p, q, s u. s. f. zeigen hier wieder die nämlichen Reihen an, welche sie in der vierten Aufgabe bezeichneten.

Beweis.

Es laſſen ſich p^k, q^r, s^v u. ſ. f. folgendermaſsen ausdrücken:

$p^k = p^k 7_1 + p^k 7_2 + p^k 7_3 + p^k 7_4 + p^k 7_5 + p^k 7_6 + \cdots\cdots$

$q^r = q^r 7_1 + q^r 7_2 + q^r 7_3 + q^r 7_4 + q^r 7_5 + q^r 7_6 + \cdots\cdots$

$s^v = s^v 7_1 + s^v 7_2 + s^v 7_3 + s^v 7_4 + s^v 7_5 + s^v 7_6 + \cdots\cdots$

" " " " " " "

folglich läſst ſich auch wegen §. 71, 2) das Produkt im allgemeinen ſo angeben wie in der Auflöſung geſchehen iſt.

Zuſatz.

Es iſt $(\ldots s^v q^r p^k) 7_{(n+1)}^{m+n} \overset{\ldots\sigma\varrho\pi}{\mathcal{M}}$.

Beiſpiel.

Es ſoll das dritte Glied des Produkts der beiden Reihen $p^{\frac{1}{2}} = (az^a + bz^b + cz^c + \ldots)^{\frac{1}{2}}$ und $q^{-2} = (Az^A + Bz^B + Cz^C + \ldots)^{-2}$ durch das Localzeichen 7 angegeben werden.

* * *

Es iſt $q^{-2} p^{\frac{1}{2}} 7_3 =$

$$\overset{\varrho\pi}{{}^4B}_{\left\{\begin{array}{c} 1, \quad 2, \quad 3, \ldots \\ p^{\frac{1}{2}}7_1, \; p^{\frac{1}{2}}7_2, \; p^{\frac{1}{2}}7_3, \ldots = \pi \\ q^{-2}7_1, q^{-2}7_2, q^{-2}7_3, \ldots = \varrho \end{array}\right\}} = \begin{array}{l} q^{-2}7_1 . p^{\frac{1}{2}}7_3 \\ + q^{-2}7_2 . p^{\frac{1}{2}}7_2 \\ + q^{-2}7_3 . p^{\frac{1}{2}}7_1 \end{array}$$

1. *Anmerkung.*

Will man die Localformel in eine ſolche verwandeln die durch Klaſſenzeichen ausgedrückt iſt, welche ſich auf die Coefficienten der gegebenen beiden Reihen beziehn,

ziehn, so muſs man von $p^{\frac{1}{2}}$ und q^{-2} nach §. 89 Aufg. 11, Aufl. die erſten drei Glieder entwickeln, und dieſe in die Localformel für die Ausdrücke ſubſtituiren, durch welche ſie repräſentirt werden.

2. *Anmerkung.*

Nimmt man die gedachte Subſtitution für $q^{-2}{}^{7}{}_{2}.p^{\frac{1}{2}}{}^{7}{}_{2}$ vor, ſo erhält man

$$-2\mathfrak{A}_{A-3_z-3\cdot 4}\left\{\begin{matrix}{}^{\chi}_{a^1}A_{z^*}\\ {}^{\chi}_{a^2}A_{z^*}\\ {}^{\chi}_{a^3}A_{z^*}\\ //\end{matrix}\right\}\times\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}_{a^{\frac{1}{2}}-1_z(\frac{1}{2}-1)a}\left\{\begin{matrix}{}^{\varphi}_{a^1}A_{z^*}\\ {}^{\varphi}_{a^2}A_{z^*}\\ {}^{\varphi}_{a^3}A_{z^*}\\ //\end{matrix}\right.$$

$$\left(\begin{matrix}1,\ 2,\ 3,\ \ldots\\ B,\ C,\ D,\ \ldots=\chi\end{matrix}\right)\qquad\left(\begin{matrix}1,\ 2,\ 3,\ \ldots\\ b,\ c,\ d,\ \ldots=\varphi\end{matrix}\right)$$

Macht man hier für die zwei Klaſſenreihen die beiden Zeiger

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & \ldots\\ {}^{\chi}_{a^1}A, & {}^{\chi}_{a^2}A, & {}^{\chi}_{a^3}A, & \ldots=\psi\end{matrix}\right)$$

$$\left(\begin{matrix}1. & 2, & 3, & \ldots\\ {}^{\varphi}_{a^1}A, & {}^{\varphi}_{a^2}A, & {}^{\varphi}_{a^3}A, & \ldots=\omega\end{matrix}\right)$$

ſo läſst ſich der für $q^{-2}{}^{7}{}_{2}.p^{\frac{1}{2}}{}^{7}{}_{2}$ angegebene Ausdruck in dieſen verwandeln:

$$-2\mathfrak{A}\ \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}_{A-3a^{\frac{1}{2}}\cdot 1_z-3\cdot 4+(\frac{1}{2}-1)a}(^{2}\overset{\omega\psi}{B}+^{3}\overset{\omega\psi}{B}+^{4}\overset{\omega\psi}{B}+\ldots)_{z^*}.$$

3. *An-*

3. *Anmerkung.*

Werden die Glieder eines Produkts noch mehrerer als zweier Reihen durch Localformeln angegeben und der erſten Anmerkung gemäſs verwandelt, ſo wird man hierbei auf deſto zuſammengeſetztere Ausdrüeke geführt, je gröſser die Anzahl der Reihen iſt, die unter ſich multiplicirt werden und je höher das Glied iſt, welches man ſucht. Die zweite Anmerkung wird aber hinreichend lehren, wie ſich ſolche Ausdrücke auf einfachere, der Form nach, reduciren laſſen,

V. Combinatoriſche Entwickelung der Quotienten mehrerer Reihen.

§. 96.

1. *Aufgabe.*

Den Quotienten $\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots}$ in eine Reihe zu verwandeln.

Auflöſung.

Es iſt $\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots} =$

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{a'A}{\alpha^2} + \frac{b'B}{\alpha^3} - \frac{c'C}{\alpha^4} + \frac{d'D}{\alpha^5} - \frac{e'E}{\alpha^6} + \ldots.$$

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4\ldots\\ \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon\ldots\end{matrix}\right)$$

Beweis.

Es iſt $\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots} = (\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots)^{-1}$, folglich nach §. 81.

$= \alpha^{-1}$

$$= \alpha^{-1} + {}^{-1}\mathfrak{A}_{\alpha-2}\,{}^{a}\mathfrak{A} + {}^{-1}\mathfrak{B}_{\alpha-3}\,{}^{b}\mathfrak{B} + {}^{-1}\mathfrak{C}_{\alpha-4}\,{}^{c}\mathfrak{C} + \ldots$$

$$= \frac{1}{\alpha} + \frac{{}^{-1}\mathfrak{A}_a\,{}^{a}\mathfrak{A}}{\alpha^2} + \frac{{}^{-1}\mathfrak{B}_b\,{}^{b}\mathfrak{B}}{\alpha^3} + \frac{{}^{-1}\mathfrak{C}_c\,{}^{c}\mathfrak{C}}{\alpha^4} + \ldots$$

$$\binom{1, 2, 3, 4, \ldots}{\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots}$$

Da nun ${}^{-1}\mathfrak{A} = -1$, ${}^{-1}\mathfrak{B} = 1$, ${}^{-1}\mathfrak{C} = -1$, ${}^{-1}\mathfrak{D} = 1$ u. s. f. ist, so ist klar, dass aus der zuletzt entwickelten Reihe, sobald darinn für die Binomialcoefficienten die eben angegebenen Werthe gesetzt werden, die in der Auflösung aufgestellte Reihe entsteht und dass diese also auch die gesuchte ist.

1. *Zusatz.*

$$\left(\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}\right)_{(n+1)} = \frac{{}^{n}\mathfrak{N}}{\alpha^{n+1}}$$

$$\binom{1, 2, 3 \ldots}{\beta, \gamma, \delta \ldots}$$

2. *Zusatz.*

Wird $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots = \alpha+q$ gesetzt, so wird in der Gleichung der Auflösung, ${}^{a}\mathfrak{A} = q$, ${}^{b}\mathfrak{B} = q^2$, ${}^{c}\mathfrak{C} = q^3$, u. s. f. und folglich ist

$$\frac{1}{\alpha+q} = \frac{1}{\alpha} - \frac{q}{\alpha^2} + \frac{q^2}{\alpha^3} - \frac{q^3}{\alpha^4} + \frac{q^4}{\alpha^5} - \frac{q^5}{\alpha^6} + \ldots\ldots$$

Substituirt man hierinn 1 für α, so erhält man

$$\frac{1}{1+q} = 1 - q + q^2 - q^3 + q^4 - q^5 + q^6 - \ldots,$$

und denkt man sich in dieser Gleichung unter q die Reihe $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots$, so ist sie mit dieser gleichgültig (§. 80).

$$\frac{1}{1+\alpha+\beta+\gamma+..} = 1 - {}_a'A + {}_b'B - {}_c'C + {}_d'D - \ldots.$$

$$\binom{1, 2, 3, 4, \ldots}{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots}$$

3. Zuſatz.

Wird in die Gleichung

$$\frac{1}{\alpha+q} = \frac{1}{\alpha} - \frac{q}{\alpha^2} + \frac{q^2}{\alpha^3} - \frac{q^3}{\alpha^4} + \frac{q^4}{\alpha^5} - \frac{q^5}{\alpha^6} + \ldots\ldots$$

—q ſtatt + q geſetzt, ſo bekömmt man

$$\frac{1}{\alpha-q} = \frac{1}{\alpha} + \frac{q}{\alpha^2} + \frac{q^2}{\alpha^3} + \frac{q^3}{\alpha^4} + \frac{q^4}{\alpha^5} + \frac{q^5}{\alpha^6} + \ldots\ldots$$

Denkt man ſich hier unter q die Reihe $\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+..$ ſo wird

$$\frac{1}{\alpha-\beta-\gamma-\delta-..} = \frac{1}{\alpha} + \frac{{}_a'A}{\alpha^2} + \frac{{}_b'B}{\alpha^3} + \frac{{}_c'C}{\alpha^4} + \ldots\ldots,$$

$$\binom{1, 2, 3, 4, \ldots}{\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots}$$

4. Zuſatz.

Setzt man in die Gleichung

$$\frac{1}{\alpha-q} = \frac{1}{\alpha} + \frac{q}{\alpha^2} + \frac{q^2}{\alpha^3} + \frac{q^3}{\alpha^4} + \frac{q^4}{\alpha^5} + \frac{q^5}{\alpha^6} + \ldots\ldots,$$

1 ſtatt α und läſst q die Reihe $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots$ bedeuten, ſo erhält man (§. 80.).

$$\frac{1}{1-\alpha-\beta-\gamma-\ldots} = 1 + {}_a'A + {}_b'B + {}_c'C + \ldots\ldots$$

$$\binom{1, 2, 3, 4, \ldots}{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots}$$

§. 97.

2. *Aufgabe.*

Es wird für $\frac{a+b+c+d+\cdots}{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots} = \frac{p}{\alpha+q}$ eine Reihe gesucht.

Auflösung.

Es ist $\frac{p}{\alpha+q} =$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{\alpha} \\ \quad - \frac{a\alpha}{\alpha^2}{}^{\pi}\mathrm{A} \end{array}\right\} + \frac{ab}{\alpha^3}{}^{\pi}\mathrm{B} \left\{ - \frac{ac}{\alpha^4}{}^{\pi}\mathrm{C} \left\{ + \frac{ad}{\alpha^5}{}^{\pi}\mathrm{D} \right\} - \cdots \right.$$

$$+ \frac{b}{\alpha} \left\{ - \frac{ba}{\alpha^2}{}^{\pi}\mathrm{A} \right\} + \frac{bb}{\alpha^3}{}^{\pi}\mathrm{B} \left\{ - \frac{bc}{\alpha^4}{}^{\pi}\mathrm{C} \right\}$$

$$+ \frac{c}{\alpha} \left\{ - \frac{ca}{\alpha^2}{}^{\pi}\mathrm{A} \right\} + \frac{cb}{\alpha^3}{}^{\pi}\mathrm{B} \left\{ \right.$$

$$+ \frac{d}{\alpha} \left\{ - \frac{da}{\alpha^2}{}^{\pi}\mathrm{A} \right\}$$

$$+ \frac{e}{\alpha} \left\{ \right.$$

$$\left(\begin{matrix} 1, 2, 3, 4, \ldots \\ \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots = \pi \end{matrix} \right)$$

Beweis.

Es ist $\frac{p}{\alpha+q} = p \cdot \frac{1}{\alpha+q}$, also nach der Auflösung der Aufgabe des §. 96.

$$=(a+b+c+\ldots)\cdot\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{a\overset{\pi}{A}}{\alpha^2}+\frac{b\overset{\pi}{B}}{\alpha^3}-\frac{c\overset{\pi}{C}}{\alpha^4}+\frac{d\overset{\pi}{D}}{\alpha^5}-\ldots\right),$$

$$\left(\begin{matrix}1,&2,&3,&4\ldots\\ \beta,&\gamma,&\delta,&\varepsilon,\ldots=\pi\end{matrix}\right)$$

folglich nach §. 71, 2)

$$=\overset{\sigma\varrho}{B}+\overset{\sigma\varrho}{B}+\overset{\sigma\varrho}{B}+\overset{\sigma\varrho}{B}+\overset{\sigma\varrho}{B}+\overset{\sigma\varrho}{B}+\overset{\sigma\varrho}{B}+\ldots\ldots$$

$$\left\{\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4, & \ldots\\ \frac{1}{\alpha}, & -\frac{a\overset{\pi}{A}}{\alpha^2}, & +\frac{b\overset{\pi}{B}}{\alpha^3}, & -\frac{c\overset{\pi}{C}}{\alpha^4}, & \ldots=\varrho\\ a, & b, & c, & d, & \ldots=\sigma\end{matrix}\right\}$$

Werden hier nun $\overset{\sigma\varrho}{B}, \overset{\sigma\varrho}{B}, \overset{\sigma\varrho}{B}$, u. s. w. entwickelt, so entsteht die Reihe der Auflösung, folglich ist diese auch die richtige.

1. *Zusatz.*

Bezeichnet man das zweite Glied der Reihe p, da a das erste ist, mit a^{+1}, das dritte mit a^{+2}, das vierte mit a^{+3}, u. s. f. das nte mit $a^{+(n-1)}$, das $(n+1)$te mit a^{+n}, so wird

$$\frac{q}{\alpha+q}\,?\,(n+1)=$$

$$\frac{a_n\overset{0}{\mathfrak{N}}}{\alpha^{n+1}}-\frac{b_n\overset{-1}{\mathfrak{N}}}{\alpha^n}+\frac{c_n\overset{-2}{\mathfrak{N}}}{\alpha^{n-1}}-\ldots+\frac{a^{+(n-1)}\,a\overset{+n}{A}}{\alpha^2}+\frac{a^{+n}}{\alpha}.$$

$$\left(\begin{matrix}1,&2,&3\ldots\\ \beta,&\gamma,&\delta\ldots\end{matrix}\right)$$

2. Zuſatz.

Da nach dem 3ten Zuſatze des §. 96, $\frac{1}{\alpha-q}$ oder

$$\frac{1}{\alpha-\beta-\gamma-\delta-\ldots} = \frac{1}{\alpha} + \frac{{}_{a}'A}{\alpha^2} + \frac{{}_{b}'B}{\alpha^3} + \frac{{}_{c}'C}{\alpha^4} + \ldots\ldots \text{ iſt,}$$

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4, & \ldots\\ \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \ldots\end{matrix}\right)$$

ſo iſt einleuchtend daſs ſich die Reihe für $p.\frac{1}{\alpha-q}$ alſo für $\frac{p}{\alpha-q}$ nur dadurch von der Reihe für $\frac{p}{\alpha+q}$ unterſcheiden kann, daſs in ihr die Zeichen nicht abwechſeln, ſondern alle + ſind. Es iſt folglich $\frac{p}{\alpha+q}\,7\,(n+1) =$

$$\frac{{}_{a}{}_{n}^{0}{}'\mathfrak{N}^{0}}{\alpha^{n+1}} + \frac{{}_{b}{}_{n}^{-1}{}'\mathfrak{N}^{-1}}{\alpha^{n}} + \frac{{}_{c}{}_{n}^{-2}{}'\mathfrak{N}^{-2}}{\alpha^{n-1}} + \ldots + \frac{{}_{a}^{+(n-2)}{}_{b}{}'B}{\alpha^3} + \frac{{}_{a}^{+(n-1)}{}_{a}{}_{a}{}'A}{\alpha^2} + \frac{{}_{a}^{+n}}{\alpha}.$$

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4, & \ldots\\ \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \ldots\end{matrix}\right).$$

§. 98.

3. Aufgabe.

Es ſoll $\frac{1}{\alpha z^{\nu} + \beta z^{\nu+\Delta} + \gamma z^{\nu+2\Delta} + \ldots}$ in eine Reihe evolvirt werden.

Auf-

Auflösung.

Es ist $\frac{1}{\alpha z^{\nu} + \beta z^{\nu+\Delta} + \gamma z^{\nu+2\Delta} + \ldots} =$

$$\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{a^1 A}{\alpha} z^{\Delta} - \left\{\frac{a^2 A}{\alpha^2} + \frac{b^2 B}{\alpha^3}\right\} z^{2\Delta} - \left\{\frac{a^3 A}{\alpha^2} + \frac{b^3 B}{\alpha^3} - \frac{c^3 C}{\alpha^4}\right\} z^{3\Delta} - \left\{\frac{a^4 A}{\alpha^2} + \frac{b^4 B}{\alpha^3} - \frac{c^4 C}{\alpha^4} + \frac{d^4 D}{\alpha^5}\right\} z^{4\Delta} - \ldots\right) z^{-\nu}$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots \\ \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \ldots \end{matrix}\right)$$

Beweis.

Es ist

$$\frac{1}{\alpha z^{\nu} + \beta z^{\nu+\Delta} + \gamma z^{\nu+2\Delta} + \ldots} = (\alpha z^{\nu} + \beta z^{\nu+\Delta} + \gamma z^{\nu+2\Delta} + \ldots)^{-1},$$

also nach §. 87.

$$= \left(\alpha^{-1} + {}^{-1}\mathfrak{A}\alpha^{-2} a^1 A z^{\Delta} + \left\{{}^{-1}\mathfrak{A}\alpha^{-2} a^2 A + {}^{-1}\mathfrak{B}\alpha^{-3} b^2 B\right\} z^{2\Delta} + \ldots\right) z^{-\nu}.$$

Wird dieser Ausdruck noch weiter fortgesetzt und werden darinn statt ${}^{-1}\mathfrak{A}, {}^{-1}\mathfrak{B}, {}^{-1}\mathfrak{C}, {}^{-1}\mathfrak{D}$ u. s. w. die Werthe $-1, +1, -1, +1$ u. s. f. substituirt, so entsteht die in der Auflösung angegebene Reihe, folglich ist diese die gesuchte.

1. *Zuſatz.*

$$\left(\frac{1}{\alpha z^{\nu}+\beta z^{\nu+\Delta}+\gamma z^{\nu+2\Delta}+..}\right)^{(n+1)}=\left(-\frac{{}^{n}_{a}\mathfrak{A}}{\alpha^{2}}+\frac{{}^{n}_{b}\mathfrak{B}}{\alpha^{3}}\right.$$

$$\left.-\frac{{}^{n}_{c}\mathfrak{C}}{\alpha^{4}}+\frac{{}^{n}_{b}\mathfrak{D}}{\alpha^{5}}-\ldots+\frac{{}^{n}_{n}\mathfrak{N}}{\alpha^{n+1}}\right)z^{n\Delta-\nu}$$

2. *Zuſatz.*

Der Inbegriff aller Klaſſen des n+1ten Gliedes läſst ſich durch $i\,{}^{n}\mathfrak{J}$ ausdrücken und weil in ihm $a\,{}^{n}\mathfrak{A}$ mit $-\frac{1}{\alpha^{1+1}}$, $b\,{}^{n}\mathfrak{B}$ mit $+\frac{1}{\alpha^{1+2}}$, $c\,{}^{n}\mathfrak{C}$ mit $-\frac{1}{\alpha^{1+3}}$, u. ſ. f. multiplicirt iſt, ſo kann man auch ſetzen

$$\left(\frac{1}{\alpha z^{\nu}+\beta z^{\nu+\Delta}+\gamma z^{\nu+2\Delta}+\ldots}\right)^{(n+1)}=$$

$$\left(\mp\frac{1}{\alpha^{1+*}}\cdot i\,{}^{n}\mathfrak{J}\right)z^{n\Delta-\nu}$$

Der Werth des Zeichens wird hier, wie aus dem Vorhergehenden erhellet, durch den Exponenten jeder einzelnen Klaſſe der $i\,{}^{n}\mathfrak{J}$ beſtimmt. Für die erſte Klaſſe nämlich, iſt $*=1$, für die zweite $=2$, für die dritte $=3$ u. ſ. w. und da wo der Werth des $*$ eine grade Zahl iſt, iſt $\frac{1}{\alpha^{1+*}}$ poſitiv, wo aber dieſer Werth eine ungrade Zahl iſt, iſt $\frac{1}{\alpha^{1+*}}$ negativ.

Drückt man die einzelnen Glieder der Reihe der Auflöſung ſo aus, wie jetzt das n+1te ausgedrückt iſt, ſo erhält man $\frac{1}{\alpha z^{\nu}+\beta z^{\nu+\Delta}+\gamma z^{2\nu+2\Delta}+\ldots}=$

$\left(\frac{1}{\alpha}\right.$

$$\left(\frac{1}{\alpha}\mp\frac{1}{\alpha^{1+*}}\cdot i^{1}J_{z}\Delta\mp\frac{1}{\alpha^{1+*}}\cdot i^{2}J_{z^{2}}\Delta\mp\right.$$

$$\left.\frac{1}{\alpha^{1+*}}\cdot i^{3}J_{z^{3}}\Delta\mp\cdots\right)z^{-\nu}$$

$$=\left(\frac{1}{\alpha}+\left(i^{1}J_{z}\Delta+i^{2}J_{z^{2}}\Delta+i^{3}J_{z^{3}}\Delta+\right.\right.$$

$$\left.\left.i^{4}J_{z^{4}}\Delta+\cdots\right)\cdot\mp\frac{1}{\alpha^{1+*}}\right)z^{-\nu}$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\cdots}{\beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\cdots}$$

3. Zusatz.

Da sich $i^{1}J+i^{2}J+i^{3}J+\ldots+i^{n}J=i^{n}\overset{n}{\mathfrak{J}}$ setzen läfst wenn man sich unter $\overset{n}{\mathfrak{J}}$ nicht blofs die Combinationen zur Summe n sondern auch die Combinationen zu allen vorhergehenden Summen denkt, wie sie diese auch deutlich vor Augen legt (pag. 93.), und da man ferner in der zuletzt entwickelten Formel ganz deutlich die Relation sieht, welche zwischen dem Exponenten einer Dignität von z, und zwischen dem Summenexponenten der J statt findet, neben welcher die Dignität steht, weil nämlich jedesmal der Exponent der z ein Produkt des Δ durch den Summenexponenten ist, so kann man die letzte Formel für $\frac{1}{\alpha z^{\varrho}+\beta z^{\nu+\Delta}+\gamma z^{\nu+2\Delta}+\ldots}$, wenn sie bis zur n+1ten Klasse entwickelt gedacht wird, auch so ausdrücken:

$$\left(\frac{1}{\alpha}+\left(i^{n}\overset{n}{\mathfrak{J}}_{z^{*}\Delta}\right)\cdot\mp\frac{1}{\alpha^{1+*}}\right)z^{-\nu}.$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\cdots}{\beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\cdots}$$

4. Zuſatz.

Setzt man $\nu = 1$ und $\Delta = 1$, ſo giebt der zweite Zuſatz

$$\frac{1}{\alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + ..} =$$

$$\left(\frac{1}{\alpha} + (i^1 J_z + i^2 J_{z^2} + i^3 J_{z^3} + ..) \cdot \mp \frac{1}{\alpha^{1+*}}\right) z^{-1}$$

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4, & ..\\ \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & ..\end{matrix}\right)$$

5. Zuſatz.

Wird $\nu = 0$ geſetzt, ſo erhält man durch den zweiten Zuſatz.

$$\frac{1}{\alpha + \beta z^{\Delta} + \gamma z^{2\Delta} + ..} =$$

$$\frac{1}{\alpha} + (i^1 J_{z^{\Delta}} + i^2 J_{z^{2\Delta}} + i^3 J_{z^{3\Delta}} + ..) \cdot \mp \frac{1}{\alpha^{1+*}}$$

Schreibt man hier 1 für Δ, ſo bekömmt man

$$\frac{1}{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + ..} =$$

$$\frac{1}{\alpha} + (i^1 J_z + i^2 J_{z^2} i^3 J_{z^3} + ..) \cdot \mp \frac{1}{\alpha^{1+*}}$$

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4 \ldots\\ \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots\end{matrix}\right)$$

6. Zuſatz.

Subſtituirt man für das α der letzten Formel die Zahl 1, ſo wird

$$\frac{1}{1+\beta z+\gamma z^2+\ldots} =$$

$$1+(i^1J_z+i^2J_{z^2}+i^3J_{z^3}+\cdots)\cdot\overline{+}\frac{1}{1^{1+*}}$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots}{\beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ldots}$$

Entwickelt man dieſe Formel in Klaſſen, ſo erhält man *a*).

$$\frac{1}{1+\beta z+\gamma z^2+\ldots} =$$

$$\left.\begin{array}{l} 1-a^1A_z-a^2A \\ \quad +b^2B \end{array}\right\} z^2 \quad \left.\begin{array}{l} -a^3A \\ +b^3B \\ -c^3C \end{array}\right\} z^3 \quad \left.\begin{array}{l} -a^4A \\ +b^4B \\ -c^4C \\ +d^4D \end{array}\right\} z^4 \quad \begin{array}{l} \text{u.} \\ \text{f.} \\ \text{w.} \end{array}$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ldots}{\beta,\ \gamma,\ \delta,\ldots}$$

Schreibt man hier α, β, γ, δ, u. ſ. w. ſtatt β, γ, δ, ε, u. ſ. f. ſo wird

a) Es iſt $\frac{1}{1^{1+*}} = 1$ und zwar poſitiv oder negativ nachdem $*$ eine grade oder ungrade Zahl iſt. Es muſs aber jede Klaſſe der einzelnen J mit $\frac{1}{1^{1+*}}$ multiplicirt werden, und der Werth des $*$ iſt der Klaſſenexponent der Klaſſe, welche mit $\frac{1}{1^{1+*}}$ multiplicirt werden ſoll, folglich iſt einleuchtend, daſs eine Klaſſe, deren Klaſſenexponent eine grade Zahl iſt, mit $+1$ und eine ſolche, deren Klaſſenexponent eine ungrade Zahl iſt, mit -1 multiplicirt werden muſs.

$$\frac{1}{1+\alpha z+\beta z^2+\ldots} =$$

$$1-a^1A_z-\left.\begin{matrix}a^2A\\+b^2B\end{matrix}\right\}z^2-\left.\begin{matrix}a^3A\\+b^3B\\+c^3C\end{matrix}\right\}z^3-\left.\begin{matrix}a^4A\\+b^4B\\+c^4C\\+d^4D\end{matrix}\right\}z^4 \quad \begin{matrix}\text{u.}\\\text{f.}\\\text{w.}\end{matrix}$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ \ldots}{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots}$$

7. *Zuſatz.*

Wird in dem letzten Ausdrucke des 6ten Zuſatzes für $+\alpha$, $+\beta$, $+\gamma$, $+\delta$ u. ſ. f.; $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$ u. ſ. w. ſubſtituirt, ſo werden für dieſe negative α, β, γ, δ, u. ſ. f. die Klaſſen eines ungraden Exponenten ſchon für ſich negativ (weil die Elemente jeder Complexion durch die Multiplication verbunden gedacht werden) und folglich wieder poſitiv, wenn man ihnen das Zeichen — vorſetzt; die Klaſſen eines graden Klaſſenexponenten hingegen bleiben poſitiv. Es iſt alſo

$$\frac{1}{1-\alpha z-\beta z^2-\ldots} =$$

$$1+a^1A_z+\left.\begin{matrix}a^2A\\+b^2B\end{matrix}\right\}z^2+\left.\begin{matrix}a^3A\\+b^3B\\+c^3C\end{matrix}\right\}z^3+\left.\begin{matrix}a^4A\\+b^4B\\+c^4C\\+d^4D\end{matrix}\right\}z^4 \quad \begin{matrix}\text{u.}\\\text{f.}\\\text{w.}\end{matrix}$$

$$= 1+i^1J_z+i^2J_{z^2}+i^3J_{z^3}+i^4J_{z^4}+\ldots.$$

$$\binom{1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots}{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\ldots}$$

Dem dritten Zuſatze nach, kann man alſo auch ſetzen, wenn die Formel die erſten $n+1$ Glieder entwickelt darſtellen ſoll,

$$\frac{1}{1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\ldots} = 1 + i^{n\,\gamma}_{\delta}z^*$$

$$\binom{1, 2, 3, \ldots}{\alpha, \beta, \gamma, \ldots}$$

Beiſpiel.

Es ſollen die erſten 6 Glieder des $\frac{1}{1-\alpha z-\beta z^2-\ldots}$ vollſtändig entwickelt werden.

* * *

Es iſt $^{5\,\gamma}_{\delta} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & \beta & \\ \alpha & \alpha & \gamma & & \\ \alpha & \beta & \beta & & \\ \alpha & \delta & & & \\ \beta & \gamma & & & \\ \varepsilon & & & & \end{array}$

folglich $\frac{1}{1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\ldots}$

$$= 1 + \alpha z + \left.\begin{matrix}\beta \\ +\alpha^2\end{matrix}\right\} z^2 + \left.\begin{matrix}\gamma \\ +2\alpha\beta \\ +\alpha^3\end{matrix}\right\} z^3 + \left.\begin{matrix}\delta \\ +2\alpha\gamma \\ +\beta^2 \\ +3\alpha^2\beta \\ +\alpha^4\end{matrix}\right\} z^4 + \left.\begin{matrix}\varepsilon \\ +2\alpha\delta \\ +2\beta\gamma \\ +3\alpha^2\gamma \\ +3\alpha\beta^2 \\ +4\alpha^3\beta \\ +\alpha^5\end{matrix}\right\} z^5 + \ldots$$

§. 99.

4. *Aufgabe.*

$\frac{az^{\mu}+bz^{\mu+\Delta}+cz^{\mu+2\Delta}+\ldots}{\alpha z^{\nu}+\beta z^{\nu+\Delta}+\gamma z^{\nu+2\Delta}+\ldots} = \frac{p}{q}$ in eine Reihe aufzulöſen.

Auf

Auflöſung.

Es iſt $\frac{p}{q}$

$$= \left\{ \frac{a}{\alpha} z^{\mu} \mp \frac{a}{\alpha^{1+*}} \cdot i^{1} J \right\} z^{\mu+\Delta} \mp \frac{a}{\alpha^{1+*}} \cdot i^{2} J \mp \frac{b}{\alpha^{1+*}} \cdot i^{1} J + \frac{c}{\alpha} \Bigg\} z^{\mu+2\Delta}$$

$$\mp \frac{a}{\alpha^{1+*}} \cdot i^{3} J \mp \frac{b}{\alpha^{1+*}} \cdot i^{2} J \mp \frac{c}{\alpha^{1+*}} \cdot i^{1} J + \frac{d}{\alpha} \Bigg\} z^{\mu+3\Delta} + \cdots \Bigg\} z^{-\nu}$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & \cdots \\ \beta, & \gamma, & \delta, & \cdots \end{matrix} \right)$$

$$= \left\{ \frac{a}{\alpha} z^{\mu} - \frac{a\, a^{1} A}{\alpha^{2}} + \frac{b}{\alpha} \right\} z^{\mu+\Delta} - \frac{a\, a^{2} A}{\alpha^{2}} + \frac{a\, b^{2} B}{\alpha^{3}} - \frac{b\, a^{1} A}{\alpha^{2}} + \frac{c}{\alpha} \Bigg\} z^{\mu+2\Delta}$$

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{a\,a^{3}A}{\alpha^{2}} + \frac{a\,b^{5}B}{\alpha^{3}} - \frac{a\,c^{5}C}{\alpha^{4}} \\ -\frac{b\,a^{2}A}{\alpha^{2}} + \frac{b\,b^{2}B}{\alpha^{3}} \\ -\frac{c\,a^{1}A}{\alpha^{2}} \\ +\frac{d}{\alpha} \end{array}\right| z^{\mu+3\Delta}+\ldots \Bigg| z^{-\nu} \Bigg| \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, \ldots \\ \beta, & \gamma, & \delta \ldots \end{pmatrix}$$

Beweis

Es ist $\frac{p}{q} =$

$$\frac{1}{\alpha z^{\nu}+\beta z^{\nu+\Delta}+\gamma z^{\nu+2\Delta}+\ldots} \cdot az^{\mu}+bz^{\mu+\Delta}+cz^{\mu+2\Delta}+\ldots,$$

also gleich dem Produkte der beiden Reihen (§. 98, 2 Z.)

$$\left(\frac{1}{\alpha} \mp \frac{1}{\alpha^{1+*}} \cdot i^{1}J_{z^{\Delta}} \mp \frac{1}{\alpha^{1+*}} \cdot i^{2}J_{z^{2\Delta}} \mp \frac{1}{\alpha^{1+*}} \cdot i^{3}J_{z^{3\Delta}} \mp \ldots\right) z^{-\nu}$$

und $a+bz^{\Delta}+cz^{2\Delta}+dz^{3\Delta}+ez^{4\Delta}+\ldots\ldots)z^{\mu}$,
und folglich nach §. 75

$$= ({}^{2}B^{sr}_{+}{}^{3}B^{sr}_{z^{\Delta}}{}_{+}{}^{4}B^{sr}_{z^{2\Delta}}{}_{+}{}^{5}B^{sr}_{z^{3\Delta}}{}_{+}{}^{6}B^{sr}_{z^{4\Delta}}{}_{+}\ldots)z^{\mu}.z^{-\nu}$$

$$= ({}^{2}B^{sr}_{z^{\mu}}{}_{+}{}^{3}B^{sr}_{z^{\mu+\Delta}}{}_{+}{}^{4}B^{sr}_{z^{\mu+2\Delta}}{}_{+}{}^{5}B^{sr}_{z^{\mu+3\Delta}}{}_{+}\ldots)z^{-\nu}$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} 1, & 2, & 3, & \ldots & \\ 1, \mp\frac{1}{\alpha^{1+*}} \cdot i^{1}J, & \mp\frac{1}{\alpha^{1+*}} \cdot i^{2}J, & \mp\ldots, & = r \\ a, & b, & c, & \ldots & = s \end{array}\right\}$$

Wird nun die letzte Formel für den darunterstehenden Zeiger entwickelt, so entsteht die erste Formel der

Auf

Auflösung und löset man in dieser die J in Klassen auf, so erhält man die zweite Formel der Auflösung, folglich sind beide Formeln der Auflösung richtig.

1. Zusatz.

Versteht man wieder, da a der erste Coefficient der Reihe p ist, unter a^{+1} den zweiten, unter a^{+2} den dritten, unter a^{+3} den vierten u. s. f. unter $a^{+(n-2)}$ den n—1ten, unter $a^{+(n-1)}$ den nten und unter a^{+n} den n+1ten Coefficienten der Reihe p, so ist

$$\frac{p}{q}\,7(n+1) = \left.\begin{array}{l} \mp \frac{a}{\alpha^{1+*}} \cdot i^{n} J \\ \mp \frac{b}{\alpha^{1+*}} \cdot i^{n-1} J \\ \mp \frac{c}{\alpha^{1+*}} \cdot i^{n-2} J \\ \mp \ldots\ldots\ldots \\ \mp \frac{a^{n-2}}{\alpha^{1+*}} \cdot i^{2} J \\ \mp \frac{a^{n-1}}{\alpha^{1+*}} \cdot i^{1} J \\ + \frac{a^{n}}{\alpha} \end{array}\right| {}_{z}^{\mu+n\Delta-\nu}$$

$$\left(\begin{smallmatrix} 1, & 2, & 3, & \ldots \\ \beta, & \gamma, & \delta, & \ldots \end{smallmatrix}\right)$$

also auch, wenn man $\mu+n\Delta-\nu = \pi$ setzt, gleich

$$-\frac{{}^{n}_{a\,a}A}{\alpha^2}+\frac{{}^{n}_{a\,b}B}{\alpha^3}-\frac{{}^{n}_{a\,c}C}{\alpha^4}+\ldots\ldots\mp\frac{{}^{n}_{a\,n}\mathfrak{N}^{r}}{\alpha^{n+1}}\Big|z^{\pi}$$

$$-\frac{{}^{n-1}_{b\,a}A}{\alpha^2}+\frac{{}^{n-1}_{b\,b}B}{\alpha^3}-\frac{{}^{n-1}_{b\,c}C}{\alpha^4}+\ldots\mp\frac{{}^{n-1}_{b\,n}\mathfrak{N}^{n-1}}{\alpha^{n}}$$

$$-\frac{{}^{n-2}_{c\,a}A}{\alpha^2}+\frac{{}^{n-2}_{c\,b}B}{\alpha^3}-\frac{{}^{n-2}_{c\,c}C}{\alpha^4}+\ldots\mp\frac{{}^{n-2}_{c\,n}\mathfrak{N}^{n-2}}{\alpha^{n-1}}$$

$$-\ldots\ldots,\ldots\ldots,\ldots\ldots$$

$$-\frac{{}^{n-3\,3}_{a\,a}A}{\alpha^2}+\frac{{}^{n-3\,3}_{a\,b}B}{\alpha^3}-\frac{{}^{n-3\,3}_{a\,c}C}{\alpha^4}$$

$$-\frac{{}^{n-2\,2}_{a\,a}A}{\alpha^2}+\frac{{}^{n-2\,2}_{a\,b}B}{\alpha^3}$$

$$-\frac{{}^{n-1\,1}_{a\,a}A}{\alpha^2}$$

$$+\frac{{}^{n}_{a}}{\alpha}$$

2. *Zuſatz.*

Setzt man $\nu=1$, $\mu=1$ und $\Delta=1$, ſo giebt die Formel der Auflöſung, die Formel für $\frac{az+bz^2+cz^3+\ldots}{\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\ldots}$.

3. *Zuſatz.*

Wird in der Formel der Auflöſung, $\nu=0$ und $\mu=0$ geſetzt, ſo entſteht die Formel für $\frac{a+bz^{\Delta}+cz^{2\Delta}+\ldots}{\alpha+\beta z^{\Delta}+\gamma z^{2\Delta}+\ldots}$.

4. *Zu-*

4. Zuſatz.

Subſtituirt man o für ν, o für μ und 1 für Δ, ſo wird aus der Formel der Auflöſung, die Formel für $\frac{a+bz+cz^2+..}{\alpha+\beta z+\gamma z^2+..}$

5. Zuſatz.

Wird o für μ, o für ν, 1 für Δ, und 1 für α geſetzt, ſo bekömmt man nach der zweiten Formel der Auflöſung,

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+\ldots}{1+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4+\ldots} = a - a\,a^{1}A \Big\}_{z} + b$$

$$\left.\begin{array}{l} -a\,a^{2}A + a\,b^{2}B \\ -b\,a^{1}A \\ +c \end{array}\right\}_{z^2} \left.\begin{array}{l} -a\,a^{3}A + a\,b^{3}B - a\,c^{3}C \\ -b\,a^{2}A + b\,b^{2}B \\ -c\,a^{1}A \\ +d \end{array}\right\}_{z^3} \begin{array}{l} \text{u.} \\ \text{f.} \\ \text{w.} \end{array}$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, \ldots \\ \beta, & \gamma, & \delta, \ldots \end{matrix}\right)$$

Setzt man hier α, β, γ, δ, ε, u. ſ. f. ſtatt β, γ, δ, ε, ζ u. ſ. w. ſo wird

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+\ldots}{1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4+\ldots} = a - a\,a^{1}A \Big\}_{z} + b$$

$$\left.\begin{array}{l} -a\,a^{2}A + a\,b^{2}B \\ -b\,a^{1}A \\ +c \end{array}\right\}_{z^2} \left.\begin{array}{l} -a\,a^{3}A + a\,b^{3}B - a\,c^{3}C \\ -b\,a^{2}A + b\,b^{2}B \\ -c\,a^{1}A \\ +d \end{array}\right\}_{z^3} \begin{array}{l} \text{u.} \\ \text{f.} \\ \text{w.} \end{array}$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, \ldots \\ \alpha, & \beta, & \gamma, \ldots \end{matrix}\right)$$

6. *Zuſatz.*

Werden in die letzte Formel des 5ten Zuſatzes ſtatt der poſitiven $+\alpha$, $+\beta$, $+\gamma$, $+\delta$, u. ſ. f. die negativen $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$, u. ſ. w. ſubſtituirt, ſo werden alle Zeichen der Formel poſitive (§. 98, 7 Zuſatz) und man bekömmt daher

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \ldots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \ldots} = \left.\begin{matrix} a + a\alpha^1 A \\ + b \end{matrix}\right\}_z$$

$$\left.\begin{matrix} + a\alpha^2 A + ab^2 B \\ + b\alpha^1 A \\ + c \end{matrix}\right\}_{z^2} \quad \left.\begin{matrix} + a\alpha^3 A + ab^3 B + ac^3 C \\ + b\alpha^2 A + bb^2 B \\ + c\alpha^1 A \\ + d \end{matrix}\right\}_{z^3} \text{ u. f. w.}$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, \ldots \\ \alpha, & \beta, & \gamma, \ldots \end{matrix}\right)$$

$$= \left.\begin{matrix} a + ai^1 J \\ + b \end{matrix}\right\}_z \quad \left.\begin{matrix} + ai^2 J \\ + bi^1 J \\ + c \end{matrix}\right\}_{z^2} \quad \left.\begin{matrix} + ai^3 J \\ + bi^2 J \\ + ci^1 J \\ + d \end{matrix}\right\}_{z^3 +} \text{ u. f. w.}$$

ſo daſs alſo $\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \cdots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \ldots} 7(n+1) =$

$$(ai^n J + bi^{n-1} J + ci^{n-2} J + di^{n-3} J + \ldots$$

$$+ a^n i^1 J + a^n)_{z^n} \text{ (§. 97. 1. Zuſ.)}$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, \ldots \\ \alpha, & \beta, & \gamma, \ldots \end{matrix}\right)$$

Beiſpiel.

Es ſoll $\frac{a + bz + cz^2 + \ldots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \ldots}\,75$ vollſtändig entwickelt werden.

* * *

Es iſt $\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \ldots}\,75 =$

$$\left(a\,{}_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots)}^{(1,2,3,4,\ldots)}J + b\,{}_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots)}^{(1,2,3,\ldots)}J + c\,{}_{(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)}^{(1,2,\ldots)}J + d\,{}_{(\alpha)}^{(1)}J + e\right)z^4$$

Conſtruirt man hier ſtatt der einzelnen Klaſſeninvolutionen eine lexicographiſche zur Summe 4, ſo erhält man

$${}_{(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)}^{(1,2,3,\ldots)}4J = \begin{array}{l} \alpha|\alpha|\alpha|\alpha \\ \alpha|\alpha|\beta \\ \alpha|\gamma \\ \beta|\beta \\ \delta \end{array}$$

folglich iſt auch das verlangte Glied gleich

$$\left.\begin{array}{l} a\delta + 2a\alpha\gamma + a\beta^2 + 3a\alpha^2\beta + a\alpha^4 \\ + b\gamma + 2b\alpha\beta + b\alpha^3 \\ + c\beta + c\alpha^2 \\ + d\alpha \\ + e \end{array}\right\} z^4$$

2. *Beiſpiel.*

Es wird die vollſtändige Entwickelung der gebrochnen Function $\frac{a + bz + cz^2}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3}$ verlangt.

* * *

Es

Es ist $\frac{a + bz + cz^2}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3} =$

$$\left.\begin{matrix} a + a.i\,{}^{1}J \\ + b \end{matrix}\right\} z + \left.\begin{matrix} a.i\,{}^{2}J \\ + b.i\,{}^{1}J \\ + c \end{matrix}\right\} z^2 + \left.\begin{matrix} a.i\,{}^{3}J \\ + b.i\,{}^{2}J \\ + c.i\,{}^{1}J \end{matrix}\right\} z^3 + \left.\begin{matrix} a.i\,{}^{4}J \\ + b.i\,{}^{3}J \\ + c.i\,{}^{2}J \end{matrix}\right\} z^4$$

folglich ist auch, da $\overset{*}{\mathfrak{J}}{}^{\mathfrak{r}}_{\binom{1,2,3}{\alpha,\beta,\gamma}} =$

$$\begin{matrix} // \\ // \\ // \\ // \\ // \\ // \end{matrix} \left|\begin{matrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \underline{\alpha} \\ \alpha & \alpha & \alpha & \underline{\beta} & \\ \alpha & \alpha & \underline{\gamma} & & \\ \alpha & \underline{\beta} & \underline{\beta} & & \\ \underline{\beta} & \underline{\gamma} & & & \end{matrix}\right|$$

$$\frac{a + bz + cz^2}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3} =$$

$$\left.\begin{matrix} a + a\alpha \\ + b \end{matrix}\right\} z + \left.\begin{matrix} a\beta + a\alpha^2 \\ + b\alpha \\ + c \end{matrix}\right\} z^2 + \left.\begin{matrix} a\gamma + 2a\alpha\beta + a\alpha^3 \\ + b\beta + b\alpha^2 \\ + c\alpha \end{matrix}\right\} z^3$$

$$\left.\begin{matrix} + 2a\alpha\gamma + a\beta^2 + 3a\alpha^2\beta + a\alpha^4 \\ + b\gamma + 2b\alpha\beta + b\alpha^3 \\ + c\beta + c\alpha^2 \end{matrix}\right\} z^4 + \ldots\ldots$$

Anmerkung.

In $\mathfrak{J}^{\mathfrak{r}}_{\binom{1,2,3}{\alpha,\beta,\gamma}}$ dürfen keine Elemente vorkommen die höher sind als γ; wie leicht diese aber vermieden werden können, wird aus der vorgenommenen Entwickelung der $\overset{*}{\mathfrak{J}}{}^{\mathfrak{r}}_{\binom{1,2,3}{\alpha,\beta,\gamma}}$ deutlich erhellen.

§. 100.

5. *Aufgabe.*

Es soll $\frac{1}{\mathfrak{A}z^{\alpha}+\mathfrak{B}z^{\beta}+\mathfrak{C}z^{\gamma}+\mathfrak{D}z^{\delta}+\ldots}=\frac{1}{q}$ in eine Reihe verwandelt werden.

Auflösung.

Es ist $\frac{1}{\mathfrak{A}z^{\alpha}+\mathfrak{B}z^{\beta}+\mathfrak{C}z^{\gamma}+\ldots}=$

$$\mathfrak{A}^{-1}z^{-\alpha}+{}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-2}z^{-2\alpha}\begin{cases}{}_{a}{}^{1}A_{z^*}\\ +{}_{a}{}^{2}A_{z^*}\\ +{}_{a}{}^{3}A_{z^*}\\ \quad\text{''}\quad\text{''}\quad\text{''}\end{cases}+{}^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-3}z^{-3\alpha}\begin{cases}{}_{b}{}^{2}B_{z^*}\\ +{}_{b}{}^{3}B_{z^*}\\ +{}_{b}{}^{4}B_{z_*}\\ \quad\text{''}\quad\text{''}\quad\text{''}\end{cases}$$

$$+{}^{-1}\mathfrak{C}\mathfrak{A}^{-4}z^{-4\alpha}\begin{cases}{}_{c}{}^{3}C+\ldots.\\ +{}_{c}{}^{4}C_{z^*}\\ +{}_{c}{}^{5}C_{z^*}\\ \quad\text{''}\quad\text{''}\quad\text{''}\end{cases}\qquad\begin{pmatrix}1,2,3,4\ldots\\ \mathfrak{B},\mathfrak{C},\mathfrak{D},\mathfrak{E}\ldots\end{pmatrix}$$

Beweis.

Es ist $\frac{1}{\mathfrak{A}z^{\alpha}+\mathfrak{B}z^{\beta}+\mathfrak{C}z^{\gamma}+\ldots}=(\mathfrak{A}z^{\alpha}+\mathfrak{B}z^{\beta}+\mathfrak{C}z^{\gamma}+\ldots)^{-1}$

Wird hier nun $(\mathfrak{A}z^{\alpha}+\mathfrak{B}z^{\beta}+\mathfrak{C}z^{\gamma}+\ldots)^{-1}$ nach §. 89 entwickelt, so entsteht die in der Auflösung angegebene Reihe, folglich ist diese auch die richtige.

Bei-

Beiſpiel.

Für $\frac{1}{\mathfrak{A}z^{\alpha} + \mathfrak{B}z^{\beta} + \mathfrak{C}z^{\gamma} + \mathfrak{D}z^{\delta}}$ eine Reihe anzugeben und die Glieder derſelben vollſtändig zu entwickeln.

* * *

Da hier der Nenner begrentzt iſt, ſo wird aus dem obigen Zeiger $\binom{1, 2, 3, 4 \cdots}{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots}$, der Zeiger $\binom{1, 2, 3}{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}}$. Für dieſen hat die höchſte Union die Summe 3, die höch-Binion die Summe 6, die höchſte Ternion die Summe 9 u. ſ. f. Es iſt folglich

$$\frac{1}{\mathfrak{A}z^{\alpha} + \mathfrak{B}z^{\beta} + \mathfrak{C}z^{\gamma} + \mathfrak{D}z^{\delta}} = \mathfrak{A}^{-1}z^{-\alpha} + {}^{-1}\mathfrak{A}_{\mathfrak{A}}{}^{-2}z^{-2\alpha}\left\{\begin{matrix} a^{1}A_{z^{*}} \\ a^{2}A_{z^{*}} \\ a^{3}A_{z^{*}} \end{matrix}\right.$$

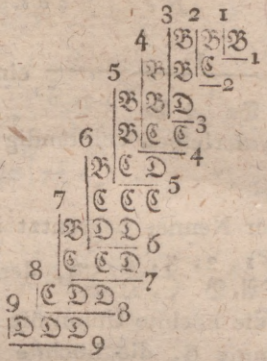
$$+ {}^{-1}\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}{}^{-3}z^{-3\alpha}\left\{\begin{matrix} b^{2}B_{z^{*}} \\ +b^{3}B_{z^{*}} \\ +b^{4}B_{z^{*}} \\ +b^{5}B_{z^{*}} \\ +b^{6}B_{z^{*}} \end{matrix}\right. \quad {}^{-1}\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}{}^{-4}z^{-4\alpha}\left\{\begin{matrix} c^{3}C_{z^{*}} + \cdots \\ +c^{4}C_{z^{*}} \\ +c^{5}C_{z^{*}} \\ +c^{6}C_{z^{*}} \\ +c^{7}C_{z^{*}} \\ +c^{8}C_{z^{*}} \\ +c^{9}C_{z^{*}} \end{matrix}\right.$$

$$\binom{1, 2, 3}{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}}$$

Um die einzelnen Klaſſen zu entwickeln, bediene man ſich folgender abgekürtzten lexicographiſchen Involution: *a)*

$$T_{3} \qquad 3$$

a) Die Regeln für die Conſtruction dieſer Involution fallen hier deutlich in die Augen. Sie iſt die abgekürzte Involution von welcher in der Anmerkung des §. 89 geſprochen wird.



so wird die gesuchte Reihe diese seyn:

$$\frac{1}{\mathfrak{A}}z^{-\alpha} - \frac{1}{\mathfrak{A}^2}\Big\{ \mathfrak{B}z^{\beta-2\alpha} + \frac{1}{\mathfrak{A}^3}\Big\{ \mathfrak{B}^2z^{2\beta-3\alpha}$$

$$\dagger \mathfrak{C}z^{\gamma-2\alpha} \qquad \dagger 2\mathfrak{B}\mathfrak{C}z^{\beta+\gamma-3\alpha}$$

$$\dagger \mathfrak{D}z^{\delta-2\alpha} \qquad \dagger 2\mathfrak{B}\mathfrak{D}z^{\beta+\delta-3\alpha} \dagger \mathfrak{C}^2z^{2\gamma-3\alpha}$$

$$\dagger 2\mathfrak{C}\mathfrak{D}z^{\gamma+\delta-3\alpha}$$

$$\dagger \mathfrak{D}^2z^{2\delta-3\alpha}$$

$$- \frac{1}{\mathfrak{A}^4}\Big\{ \mathfrak{B}^3z^{3\beta-4\alpha} \qquad + \ldots\ldots$$

$$\dagger 3\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}z^{2\beta+\gamma-4\alpha}$$

$$\dagger 3\mathfrak{B}^2\mathfrak{D}z^{2\beta+\delta-4\alpha} \dagger 3\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2z^{\beta+2\gamma-4\alpha}$$

$$\dagger 6\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}z^{\beta+\gamma+\delta-4\alpha} \dagger \mathfrak{C}^3z^{3\gamma-4\alpha}$$

$$\dagger 3\mathfrak{B}\mathfrak{D}^2z^{\beta+2\delta-4\alpha} + 3\mathfrak{C}^2\mathfrak{D}z^{2\gamma+\delta-4\alpha}$$

$$\dagger \mathfrak{C}\mathfrak{D}^2z^{\gamma+2\delta-4\alpha}$$

$$\dagger \mathfrak{D}^3z^{3\delta-4\alpha}$$

Zu-

Zusatz

Es ist $\frac{1}{\mathfrak{A}z^{\alpha} + \mathfrak{B}z^{\beta} + \mathfrak{C}z^{\gamma} + \ldots}{}^{(n+1)}$

$$= {}^{-1}\mathfrak{M}\mathfrak{A}^{-(n+1)}z^{-(n+1)\alpha}\left\{\begin{array}{l} {}^{n}_{n}\mathfrak{N}_{z^*} \\ +{}^{n+1}_{n}\mathfrak{N}_{z^*} \\ +{}^{n+2}_{n}\mathfrak{N}_{z^*} \\ + \quad \text{''} \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{c} 1, 2, 3 \ldots \\ \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots \end{array}\right)$$

§. 101.

6. *Aufgabe.*

$\frac{Az^a + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \ldots}{\mathfrak{A}z^{\alpha} + \mathfrak{B}z^{\beta} + \mathfrak{C}z^{\gamma} + \mathfrak{D}z^{\delta} + \ldots} = \frac{p}{q}$ in eine Reihe zu evolviren.

Auflösung.

Es ist $\frac{p}{q} = A\mathfrak{A}^{-1}z^{a-\alpha}$

$$- A\mathfrak{A}^{-2}z^{a-\alpha}\left\{\begin{array}{l} {}^{1}\mathfrak{A}z^{*} \\ +{}^{2}\mathfrak{A}z^{*} \\ +{}^{3}\mathfrak{A}z^{*} \\ \text{'' '' ''} \end{array}\right. + A\mathfrak{A}^{-3}z^{a-3\alpha}\left\{\begin{array}{ll} {}^{2}\mathfrak{B}z^{*} & \text{u.} \\ +{}^{3}\mathfrak{B}z^{*} & \text{f.} \\ +{}^{4}\mathfrak{B}z^{*} & \\ \text{'' '' ''} & \text{w.} \end{array}\right.$$

$$+ B\mathfrak{A}^{-1}z^{b-\alpha} \qquad - B\mathfrak{A}^{-2}z^{b-2\alpha}\left\{\begin{array}{ll} {}^{1}\mathfrak{A}z^{*} & \text{u.} \\ +{}^{2}\mathfrak{A}z^{*} & \text{f.} \\ +{}^{3}\mathfrak{A}z^{*} & \\ \text{'' '' ''} & \text{w.} \end{array}\right.$$

$$+ C\mathfrak{a}^{-1}z^{c-\alpha}$$

$$\left(\begin{array}{c} 1, 2, 3, 4 \ldots \\ \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E} \ldots \end{array}\right)$$

Beweis.

Es ist $\frac{p}{q} = p \cdot \frac{1}{q} = p \cdot q^{-1}$, folglich nach §. 95

$$= {}^{2}B^{\varrho\pi} + {}^{3}B^{\varrho\pi} + {}^{4}B^{\varrho\pi} + {}^{5}B^{\varrho\pi} + {}^{6}B^{\varrho\pi} + {}^{7}B^{\varrho\pi} + {}^{8}B^{\varrho\pi} + \cdots$$

$$\left\{\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & \cdots \\ q^{-1}1, & q^{-1}2, & q^{-1}3, & \cdots = \pi \\ p1, & p2, & p3, & \cdots = \varrho \end{matrix}\right\}$$

$$= p1.q^{-1}1 \left\{ \begin{matrix} + p1.q^{-1}2 \\ + p2.q^{-1}1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} + p1.q^{-1}3 \\ + p2.q^{-1}2 \\ + p3.q^{-1}1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} + p1.q^{-1}4 \\ + p2.q^{-1}3 \\ + p3.q^{-1}2 \\ + p4.q^{-1}1 \end{matrix} \right\} + \cdots$$

Es ist aber nach §. 100 (Aufg. Aufl.), wenn man statt der Binominalcoefficienten sogleich ihre Werthe setzt und ${}'A$ für ${}_{a}{}^{1}\mathrm{A} + {}_{a}{}^{2}\mathrm{A} + {}_{a}{}^{3}\mathrm{A} + \cdots$, und ${}'B$ für ${}_{b}{}^{2}\mathrm{B} + {}_{b}{}^{3}\mathrm{B} + {}_{b}{}^{4}\mathrm{B} + \cdots$ schreibt u. s. w.

$$q^{-1} = \mathfrak{A}^{-1}z^{-\alpha} - \mathfrak{A}^{-2}z^{-2\alpha}\,{}'A_{z^*} + \mathfrak{A}^{-3}z^{-3\alpha}\,{}'B_{z^*} - \mathfrak{A}^{-4}z^{-4\alpha}\,{}'C_{z^*} + \cdots,$$

folglich ist auch pq^{-1}

$$= Az^{a}.\mathfrak{A}^{-1}z^{-\alpha} - Az^{a}.\mathfrak{A}^{-2}z^{-2\alpha}\,{}'A_{z^*} + Bz^{b}.\mathfrak{A}^{-1}z^{-\alpha}$$

$$+ Az^{a}.\mathfrak{A}^{-3}z^{-3\alpha}\,{}'B_{z^*} - \text{"}$$
$$- Bz^{b}.\mathfrak{A}^{-2}z^{-2\alpha}\,{}'A_{z^*} + \text{"}$$
$$+ Cz^{c}.\mathfrak{A}^{-1}z^{-\alpha} - \text{"}$$

=

$$= A\mathfrak{A}^{-1}z^{a-\alpha} - A\mathfrak{A}^{-2}z^{a-2\alpha'}A_{z^*} + A\mathfrak{A}^{-3}z^{a-3\alpha'}B_{z^*} - u.$$
$$+ B\mathfrak{A}^{-1}z^{b-\alpha} \quad - B\mathfrak{A}^{-2}z^{b-2\alpha'}A_{z^*} + f.$$
$$+ C\mathfrak{A}^{-1}z^{c-\alpha} \quad - w.$$

Subſtituirt man hierinn für $'A$ wieder den Werth ${}_a{}^1A + {}_a{}^2A + {}_a{}^3A + \ldots$; für $'B$ den Werth ${}_b{}^1B + {}_b{}^2B + {}_b{}^3B + \ldots\ldots$, ſo entſteht die Formel der Auflöſung.

Zuſatz.

Bezeichnet man hier das n—1te Glied der Reihe p mit $\overset{n-2}{A}$, das nte mit $\overset{n-1}{A}$ und das n+1te mit $\overset{n}{A}$ u. ſ. f. und bezeichnet eben ſo den Exponenten des n—1ten Gliedes der Reihe p mit $\overset{n-2}{a}$, den Exponenten des nten Gliedes mit $\overset{n-1}{a}$ und den Exponenten des n+1ten Gliedes mit $\overset{n}{a}$, ſo iſt

$$\frac{p}{q}\,7\,(n+1)$$
$$= A\mathfrak{A}^{-(n+1)}z^{a-(n+1)\alpha'}\overset{0}{N}_{z^*} - B\mathfrak{A}^{-n}z^{b-n\alpha'}\overset{-1}{N}_{z^*} +$$
$$C\mathfrak{A}^{-(n-1)}z^{c-(n-1)\alpha'}\overset{-2}{N}_{z^*} \ldots \mp A\mathfrak{A}^{-3}z^{\overset{n-2}{a}-3\alpha'}B_{z^*}$$
$$+ A\mathfrak{A}^{-2}z^{\overset{n-1}{a}-2\alpha'}A_{z^*} \mp \overset{n}{A}\mathfrak{A}^{-1}z^{\overset{n}{a}-\alpha}.$$

Löſet man nun die Variationsklaſſen dieſer Formel in Combinationsklaſſen zu beſtimmten Summen auf, ſo erhält man für das n+1te Glied einen ſolchen Ausdruck als die Auflöſung der 6ten Aufgabe für $\frac{p}{q}$ überhaupt giebt.

Beiſpiel.

Das dritte Glied des $\frac{Az^a + Bz^b + Cz^c}{\mathfrak{A}z^\alpha + \mathfrak{B}z^\beta + \mathfrak{C}z^\gamma}$ zu entwickeln.

* * *

Es iſt $\frac{Az^a + Bz^b + Cz^c}{\mathfrak{A}z^\alpha + \mathfrak{B}z^\beta + \mathfrak{C}z^\gamma} 73 =$

$$A\mathfrak{A}^{-3}z^{a-3\alpha}\begin{cases} {}_b{}^2\mathfrak{B}z^* \\ +{}_b{}^3\mathfrak{B}z^* \\ +{}_b{}^4\mathfrak{B}z^* \end{cases} -B\mathfrak{A}^{-2}z^{b-2\alpha}\begin{cases} {}_a{}^1\mathfrak{A}z^* \\ +{}_a{}^2\mathfrak{A}z^* \end{cases} + C\mathfrak{A}^{-1}z^{c-\alpha}$$

$$\binom{1,\ 2}{\mathfrak{B},\ \mathfrak{C}}$$

$$= A\mathfrak{A}^{-3}z^{a-3\alpha}\begin{cases} \mathfrak{B}^2z^{2\beta} \\ +2\mathfrak{B}\mathfrak{C}z^{\beta+\gamma} \\ +\mathfrak{C}^2z^{2\gamma} \end{cases} -B\mathfrak{A}^{-2}z^{b-2\alpha}\begin{cases} \mathfrak{B}z^\beta \\ +\mathfrak{C}z^\gamma \end{cases} + C\mathfrak{A}^{-1}z^{c-\alpha}$$

$$= \frac{A}{\mathfrak{A}^3}\begin{cases} \mathfrak{B}^2z^{a+2\beta-3\alpha} \\ +2\mathfrak{B}\mathfrak{C}z^{a+\beta+\gamma-3\alpha} \\ +\mathfrak{C}^2z^{a+2\gamma-3\alpha} \end{cases} - \frac{B}{\mathfrak{A}^2}\begin{cases} \mathfrak{B}z^{b+\beta-2\alpha} \\ +\mathfrak{C}z^{b+\gamma-2\alpha} \end{cases} + \frac{C}{\mathfrak{A}}z^{c-\alpha}$$

§. 102.

7. *Aufgabe.*

Es ſoll $\frac{(Az^\mu + Bz^{\mu+\Delta} + Cz^{\mu+2\Delta} + \ldots)^m}{(\alpha z^\nu + \beta z^{\nu+\Delta} + \gamma z^{\nu+2\Delta} + \ldots)^n} = \frac{p^m}{q^n}$ unter der Bedingung entwickelt werden, daſs unter m eine ganze poſitive Zahl gedacht wird.

Auf

Auflösung.

Wenn man $m\mu - \nu = \Sigma$ setzt, so ist $\frac{p^m}{q^n} =$

$$\left.\begin{array}{l} {}^{\sigma}_{m}{}^{m}\mathfrak{M}_{\alpha z}{}^{\Sigma} + {}^{\sigma}_{m}{}^{m}\mathfrak{M}\cdot {}^{-n}\mathfrak{A}_{\alpha-n-1}\,{}^{\varrho}_{a}{}^{1}\mathfrak{A} \\ + {}^{\sigma}_{m}{}^{m+1}\mathfrak{M}_{\alpha-n} \end{array}\right\}_{z}{}^{\Sigma+\Delta}$$

$$+ {}^{\sigma}_{m}{}^{m}\mathfrak{M}\left\{\begin{array}{l} {}^{-n}\mathfrak{A}_{\alpha-n-1}\,{}^{\varrho}_{a}{}^{2}\mathfrak{A} \\ + {}^{-n}\mathfrak{B}_{\alpha-n-2}\,{}^{\varrho}_{b}{}^{2}\mathfrak{B} \end{array}\right\}_{z}{}^{\Sigma+2\Delta} \quad \text{u.}$$

$$+ {}^{\sigma}_{m}{}^{m+1}\mathfrak{M}\ {}^{-2}\mathfrak{A}_{\alpha-n-1}\,{}^{\varrho}_{a}{}^{1}\mathfrak{A} \quad \text{f.}$$

$$+ {}^{\sigma}_{m}{}^{m+2}\mathfrak{M}_{\alpha-n} \quad \text{w.}$$

$$\left(\begin{smallmatrix} 1, & 2, & 3, & \ldots \\ A, & B, & C, & \ldots \end{smallmatrix} = \sigma\right) \qquad \left(\begin{smallmatrix} 1, & 2, & 3, & \ldots \\ \alpha, & \gamma, & \delta, & \ldots \end{smallmatrix} = \varrho\right)$$

Beweis.

Es ist $\frac{p^m}{q^n} = p^m \cdot \frac{1}{q^n} = p^m \cdot q^{-n}$, folglich nach §. 95

$$= {}^{2}_{\upsilon\tau}B + {}^{3}_{\upsilon\tau}B + {}^{4}_{\upsilon\tau}B + {}^{5}_{\upsilon\tau}B + {}^{6}_{\upsilon\tau}B + {}^{7}_{\upsilon\tau}B + {}^{8}_{\upsilon\tau}B + \ldots\ldots$$

$$\left\{\begin{array}{c} 1, \quad 2, \quad 3, \ldots. \\ q^{-n}/1, q^{-n}/2, q^{-n}/3, \ldots. = \tau \\ p^{m}/1, \ p^{m}/2, \ p^{m}/3, \ldots. = \upsilon \end{array}\right\}$$

$$= p^{m\eta_1}.q^{-n\eta_1} + p^{m\eta_1}.q^{-n\eta_2} \left\{ + p^{m\eta_1}.q^{-n\eta_3} \left\{ + p^{m\eta_1}.q^{-n\eta_4} + \cdots \right. \right.$$
$$\left. + p^{m\eta_2}.q^{-n\eta_1} \left\{ + p^{m\eta_2}.q^{-n\eta_2} \left\{ + p^{m\eta_2}.q^{-n\eta_3} \right. \right. \right.$$
$$\left. \left. + p^{m\eta_3}.q^{-n\eta_1} \right\} + p^{m\eta_3}.q^{-n\eta_2} \right\}$$
$$\left. + p^{m\eta_4}.q^{-n\eta_1} \right\}$$

Nach §. 86 ist aber

$$p^m = {}^m\mathfrak{M}_z{}^{m\mu} + {}^{m+1}\mathfrak{M}_z{}^{m\mu+\Delta} + {}^{m+2}\mathfrak{M}_z{}^{m\mu+2\Delta} + \cdots$$
$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & \cdots \\ A, & B, & C, & D, & \cdots = \sigma \end{matrix}\right)$$

und nach §. 87 ist

$$q^{-n} = \alpha^{-n_z - n\nu}$$
$$+ {}^{-n}\mathfrak{A}_{\alpha^{-n-1}a^1}\mathrm{A}_z{}^{-n\nu+\Delta} + {}^{-n}\mathfrak{A}_{\alpha^{-n-1}a^2}\mathrm{B}_z{}^{-n\nu+2\Delta} \left\{ \begin{matrix} \text{u.} \\ \text{f.} \\ \text{w.} \end{matrix} \right.$$
$$+ {}^{-n}\mathfrak{B}_{\alpha^{-n-2}b^2}\mathrm{B}$$
$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & \cdots \\ \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \cdots = \varrho \end{matrix}\right)$$

Subſtituirt man nun in die vorhin angegebene Localformel für die Localzeichen diejenigen Glieder dieſer beiden Reihen, welche ſie repräſentiren, ſetzt Σ ſtatt $m\mu - n\nu$ und ordnet den dadurch erhaltenen Ausdruck gehörig, ſo bekömmt man die Formel der Auflöſung.

1. *Zusatz.* a)

Es ist $\frac{p^m}{q^n}\,7p+1 =$

$$\left\{\begin{matrix} {}_m^{m}\mathfrak{M}^{\sigma}\left\{\begin{matrix} {}^{-n}\mathfrak{A}_{\alpha-n-1}\,{}_a^{p}\mathrm{A} \\ +{}^{-n}\mathfrak{B}_{\alpha-n-2}\,{}_b^{p}\mathrm{B} \\ +{}^{-n}\mathfrak{C}_{\alpha-n-3}\,{}_c^{p}\mathrm{C} \\ + \;\;''\;\;''\;\;''\;\;'' \\ +{}^{-n}\mathfrak{P}_{\alpha-n-p}\,{}_p^{\circ p}\overset{\circ}{\mathrm{P}} \end{matrix}\right. \\ +{}_m^{m+1}\mathfrak{M}^{\sigma}\left\{\begin{matrix} {}^{-n}\mathfrak{A}_{\alpha-n-1}\,{}_a^{p-1}\mathrm{A} \\ +{}^{-n}\mathfrak{B}_{\alpha-n-2}\,{}_b^{p-1}\mathrm{B} \\ +{}^{-n}\mathfrak{C}_{\alpha-n-3}\,{}_c^{p-1}\mathrm{C} \\ + \;\;''\;\;''\;\;''\;\;'' \\ +{}^{-n}\mathfrak{P}_{\alpha-n-(p-1)}\,{}_p^{-1}\overset{-1}{\mathrm{P}} \end{matrix}\right. +\cdots \end{matrix}\right.$$

$$+{}_m^{m+(p-2)}\mathfrak{M}^{\sigma}\left\{\begin{matrix} {}^{-n}\mathfrak{A}_{\alpha-n-1}\,{}_a^{2}\mathrm{A} \\ +{}^{-n}\mathfrak{B}_{\alpha-n-2}\,{}_b^{2}\mathrm{B} \end{matrix}\right. +{}_m^{m+(p-1)}\mathfrak{M}^{\sigma}\,{}^{-n}\mathfrak{A}_{\alpha-n-1}\,{}_a^{1}\mathrm{A}$$

$$+{}_m^{m+p}\mathfrak{M}^{\sigma}{}_{\alpha}{}^{-n}\}z^{\Sigma+p\Delta}$$

$(\overset{1,\ 2,\ 3,\ \ldots}{\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C},\ \ldots} = \sigma)$ $\qquad (\overset{1,\ 2,\ 3,\ \ldots}{\beta,\ \gamma,\ \delta,\ \ldots})$

2. *Zusatz.*

Wird $\mu = o$, $\nu = o$, $\Delta = 1$ und $\alpha = 1$ gesetzt, so erhält man

$$\frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B}z+\mathrm{C}z^2+\mathrm{D}z^3+\ldots)^m}{(1+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\ldots)^n} =$$

$$\left.\begin{matrix} {}_m^{m}\mathfrak{M}^{\sigma} + {}_m^{m}\mathfrak{M}^{\sigma}.\,{}^{-n}\mathfrak{A}_{a}\,{}^{1}\overset{\rho}{\mathrm{A}} \\ +{}_m^{m+1}\mathfrak{M}^{\sigma} \end{matrix}\right\}z +$$

$+\ldots$

a) $\overset{\circ}{\mathrm{P}}$ bedeutet hier die pte also $\overset{-1}{\mathrm{P}}$ die p−1te Klasse.

$$+ {}^{m}_{m}\mathfrak{M}^{\sigma}\left\{\begin{matrix}{}^{-n}_{a}\mathfrak{A}^{2}\mathrm{A}^{\varrho} \\ {}^{-n}_{+b}\mathfrak{B}^{2}\mathrm{B}^{\varrho}\end{matrix}\right\}z^{2}+\ldots \qquad \left(\begin{matrix}1,2,3,\ldots \\ \mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\ldots=\sigma\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}1,2,3,\ldots \\ \beta,\gamma,\delta,\ldots=\varrho\end{matrix}\right)$$

$$+{}^{m+1}_{m}\mathfrak{M}^{\sigma}.{}^{-n}_{a}\mathfrak{A}^{1}\mathrm{A}^{\varrho}$$

$$+{}^{m+2}_{m}\mathfrak{M}^{\sigma}$$

3. *Zuſatz.*

Setzt man im zweiten Zuſatze $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, u. ſ. f. ſtatt $+\beta$, $+\gamma$, $+\delta$, u. ſ. w, ſo werden die Klaſſen eines ungraden Klaſſenexponenten, welche ſich auf ϱ beziehn, negativ und folglich iſt

$$\frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B}z+\mathrm{C}z^{2}+\mathrm{D}z^{3}+..,)^{m}}{(1-\alpha z-\beta z^{2}-\delta z^{3}-\ldots)^{n}}=$$

$$\left.\begin{matrix}{}^{m}_{m}\mathfrak{M}^{\sigma}+{}^{m}_{m}\mathfrak{M}^{\sigma}.{}^{-n}_{a}\mathfrak{A}^{1}\mathrm{A} \\ +{}^{m+1}_{m}\mathfrak{M}^{\sigma}\end{matrix}\right\}z+$$

$$+{}^{m}_{m}\mathfrak{M}^{\sigma}\left\{\begin{matrix}{}^{-n}_{a}\mathfrak{A}^{2}\mathrm{A}^{\varrho} \\ {}^{-n}_{+b}\mathfrak{B}^{2}\mathrm{B}^{\varrho}\end{matrix}\right\}z^{2}+\ldots \qquad \left(\begin{matrix}1,2,3,\ldots \\ \mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\ldots=\sigma\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}1,2,3,\ldots \\ \alpha,\beta,\gamma,\ldots=\varrho\end{matrix}\right)$$

$$+{}^{m+1}_{m}\mathfrak{M}^{\sigma}.{}^{-n}_{a}\mathfrak{A}^{1}\mathrm{A}^{\varrho}$$

$$+{}^{m+2}_{m}\mathfrak{M}^{\sigma}$$

4. Zu-

4. Zusatz.

Substituirt man im 3ten Zusatze 1 für m, so wird $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}$ und folglich ist

$$\frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots}{(1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \ldots)^n} =$$

$$\left.\begin{array}{l} {}^{\sigma}_{a}\mathfrak{A}^{1} + {}^{\sigma}_{a}\mathfrak{A}^{1} \cdot {}^{-n}\mathfrak{A}_{a}{}^{\varrho}_{1}\mathfrak{A} \\ \quad + {}^{\sigma}_{a}\mathfrak{A}^{2} \end{array}\right\} z +$$

$$\left.\begin{array}{l} {}^{\sigma}_{a}\mathfrak{A}^{1} \left\{ \begin{array}{l} {}^{-n}\mathfrak{A}_{a}{}^{\varrho}_{2}\mathfrak{A} \\ + {}^{-n}\mathfrak{B}_{b}{}^{\varrho}_{2}\mathfrak{B} \end{array} \right. \\ + {}^{\sigma}_{a}\mathfrak{A}^{2} \cdot {}^{-n}\mathfrak{A}_{a}{}^{\varrho}_{1}\mathfrak{A} \\ + {}^{\sigma}_{a}\mathfrak{A}^{3} \end{array}\right\} z^2 + {}^{\sigma}_{a}\mathfrak{A}^{1} \left\{ \begin{array}{l} {}^{-n}\mathfrak{A}_{a}{}^{\varrho}_{3}\mathfrak{A} \\ + {}^{-n}\mathfrak{B}_{b}{}^{\varrho}_{3}\mathfrak{B} \\ - {}^{-n}\mathfrak{C}_{c}{}^{\varrho}_{3}\mathfrak{C} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ + {}^{\sigma}_{a}\mathfrak{A}^{2} \left\{ \begin{array}{l} {}^{-n}\mathfrak{A}_{a}{}^{\varrho}_{2}\mathfrak{A} \\ + {}^{-n}\mathfrak{B}_{b}{}^{\varrho}_{2}\mathfrak{B} \end{array} \right. \\ + {}^{\sigma}_{a}\mathfrak{A}^{3} \cdot {}^{-n}\mathfrak{A}_{a}{}^{\varrho}_{1}\mathfrak{A} \\ + {}^{\sigma}_{a}\mathfrak{A}^{4} \end{array} \right\} z^3 + \ldots$$

$$\left(\begin{array}{l} 1, 2, 3, \ldots \\ A, B, C, \ldots = \sigma \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{l} 1, 2, 3, \ldots \\ \alpha, \beta, \gamma, \ldots = \varrho \end{array}\right)$$

Bei-

Beiſpiel.

Die erſten vier Glieder der Reihe für $\frac{A+Bz+Cz^2+Dz^3+..}{(1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-..)^3}$ vollſtändig zu entwickeln.

* * *

Die lexicographiſche Involution $\alpha|\alpha|\alpha$ $\alpha|\beta$ γ begreift alle hier nöthige Klaſſen für den Zeiger $\binom{1, 2, 3, \ldots}{\alpha, \beta, \gamma, \ldots}$ in ſich.

Es iſt daher

$$\frac{A+Bz+Cz^2+Dz^3+..}{(1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-..)^3} = A+3A\alpha \left\{ \begin{matrix} z+3A\beta \\ +B \end{matrix} \right. \left\{ \begin{matrix} z^2+3A\gamma \\ +6A\alpha^2 \\ +3B\alpha \\ +C \end{matrix} \right. \left\{ \begin{matrix} z^3+ \\ +6A\alpha\beta \\ +10A\alpha^3 \\ +3B\beta \\ +6B\alpha^2 \\ +3C\alpha \\ +D \end{matrix} \right. z^3+.$$

5. *Zuſatz.*

Werden im vierten Zuſatze die Coefficienten $\beta, \gamma, \delta,$ u. ſ. f. gleich Null geſetzt, ſo wird

$$\frac{A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots}{(1-\alpha z)^n} = {}_a^1A^{\sigma} - {}_a^1A^{\sigma} \cdot {}^{-n}\mathfrak{A}\left\{ {}_a^1A^{\rho} + {}_a^2A^{\sigma} \right\} z$$

$$\left.\begin{array}{l} +{}_a^{\sigma}\mathfrak{A}_a^{1}\mathfrak{A}\,z^2 \\ -{}_a^{\sigma}\mathfrak{A}_a^{2}\mathfrak{A}\,z^2 \\ +{}_a^{\sigma}\mathfrak{A}_a^{3}\mathfrak{A}\,z^2 \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} -{}_a^{\sigma}\mathfrak{A}_a^{1}\mathfrak{B}_b^{\varrho}\mathfrak{B}\,z^2 \\ +{}_a^{\sigma}\mathfrak{A}_a^{2}\mathfrak{B}_b^{\varrho}\mathfrak{B}\,z^2 \\ -{}_a^{\sigma}\mathfrak{A}_a^{3}\mathfrak{B}_b^{\varrho}\mathfrak{B}\,z^2 \\ +{}_a^{\sigma}\mathfrak{A}_a^{4}\mathfrak{B}_b^{\varrho}\mathfrak{B}\,z^2 \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} +{}_a^{\sigma}\mathfrak{A}_a^{1}\mathfrak{C}_c^{\varrho}\mathfrak{C}\,z^3 \\ -{}_a^{\sigma}\mathfrak{A}_a^{2}\mathfrak{C}_c^{\varrho}\mathfrak{C}\,z^3 \\ +{}_a^{\sigma}\mathfrak{A}_a^{3}\mathfrak{C}_c^{\varrho}\mathfrak{C}\,z^3 \\ -{}_a^{\sigma}\mathfrak{A}_a^{4}\mathfrak{C}_c^{\varrho}\mathfrak{C}\,z^3 \\ +{}_a^{\sigma}\mathfrak{A}_a^{5}\mathfrak{C}_c^{\varrho}\mathfrak{C}\,z^3 \end{array}\right| + \cdots$$

$$\left(\begin{smallmatrix} 1,2,3\ldots \\ A,B,C\ldots \end{smallmatrix} = \sigma\right) \qquad \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ a \end{smallmatrix} = \varrho\right)$$

Beiſpiel.

Es ſoll $\dfrac{A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots}{(1-\alpha z)^4}$ vollſtändig entwickelt werden.

* * *

Es iſt $\dfrac{A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots}{(1-\alpha z)^4} =$

$$\left.\begin{array}{l} A+4A\alpha \\ +B \end{array}\right\} z + \left.\begin{array}{l} +10A\alpha^2 \\ +4B\alpha \\ +C \end{array}\right\} z^2 + \left.\begin{array}{l} +20A\alpha^3 \\ +10B\alpha^2 \\ +4C\alpha \\ +D \end{array}\right\} z^3 + \left.\begin{array}{l} +35A\alpha^4 \\ +20B\alpha^3 \\ +10C\alpha^2 \\ +4D\alpha \\ +E \end{array}\right\} z^4 + \cdots$$

6. *Zuſatz.*

Es iſt $\dfrac{A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots}{(1-\alpha z)^n} \mathfrak{I}\,(m+1) =$

$$(\mp {}_a^{1}\overset{\sigma}{A}.^{-n}\overset{o}{\mathfrak{M}}_m^{m}\overset{o}{\mathcal{M}}\mp {}_a^{2}\overset{\sigma}{A}.^{-n}\overset{-1}{\mathfrak{M}}_m^{-1\,m-1}\overset{-1}{\mathcal{M}}\mp$$

$${}_a^{3}\overset{\sigma}{A}.^{-n}\overset{-2}{\mathfrak{M}}_m^{-2\,m-2}\overset{-2}{\mathcal{M}}+///-{}_a^{m-2}\overset{\sigma}{A}.^{-n}\mathfrak{C}_c{}^{3}C+$$

$${}_a^{m-1}\overset{\sigma}{A}.^{-n}\mathfrak{B}_b{}^{2}B-{}_a^{m}\overset{\sigma}{A}.^{-n}\mathfrak{A}_a{}^{1}A+{}_a^{m+1}\overset{\sigma}{A})z^m$$

$$\left(\begin{matrix}1,\ 2,\ 3\ldots\\ A,\ B,\ C\ldots=\sigma\end{matrix}\right)\quad\left(\begin{matrix}1\\ \alpha\end{matrix}\right)$$

$$=(\mp {}_a^{1}A.^{-n}\overset{o}{\mathfrak{M}}\alpha^m\mp {}_a^{2}A.^{-n}\overset{-1}{\mathfrak{M}}\alpha^{m-1}\mp {}_a^{3}A.^{-n}\overset{-2}{\mathfrak{M}}\alpha^{m-2}$$

$$\mp///-{}_a^{m-2}A.^{-n}\mathfrak{C}\alpha^3+{}_a^{n-1}A.^{-n}\mathfrak{B}\alpha^2-{}_a^{m}A.^{-n}\mathfrak{A}\alpha$$

$$+{}_a^{m+1}A)z^m$$

$$\left(\begin{matrix}1,\ 2,\ 3,\ldots\\ A,\ B,\ C,\ldots\end{matrix}\right)$$

Soll der Zähler der gebrochnen Zahl mit dem nten Gliede, alſo mit $\overset{n-1}{A}z^{n-1}$ abbrechen, ſo bricht das m+1te Glied der Reihe dieſer gebrochnen Zahl mit dem Theile ab, in welchem ${}_a^{n}A$ vorkömmt. Es iſt folglich

$$\frac{A+Bz+Cz^2+Dz^3+\ldots.\ \overset{n-1}{A}z^{n-1}}{(1-\alpha z)^m}\,/\,(m+1)=$$

$$(\mp {}_a^{1}A.^{-n}\overset{o}{\mathfrak{M}}\alpha^m\mp {}_a^{2}A.^{-n}\overset{-1}{\mathfrak{M}}\alpha^{m-1}\mp {}_a^{3}A.^{-n}\overset{-2}{\mathfrak{M}}\alpha^{m-2}\mp//$$

$$//+{}_a^{n}\overset{-(n-1)}{A}.^{-n}\mathfrak{M}\alpha^{m-(n-1)})z^m$$

$$\left(\begin{matrix}1,\ 2,\ 3\ldots.\ n\\ A,\ B,\ C\ldots,\ A^{n-1}\end{matrix}\right)$$

An-

Anmerkung.

In beiden Formeln für das $n+1$te Glied wird aus $\mp$ das Zeichen $+$ wo der Exponent der α eine grade Zahl ist, hingegen wo der Exponent der α eine ungrade Zahl ist, wird aus $\mp$ das Zeichen $-$.

Beispiel.

Es soll $\frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3}{(1-\alpha z)^4}$ 7 6 vollständig entwickelt werden.

* * *

Da hier ${}^{n}A = {}^{4}A$, so ist nach der letzten Formel das gesuchte Glied gleich

$$({}_{\alpha}{}^{1}A.{}^{-4}\mathfrak{C}\alpha^5 + {}_{\alpha}{}^{2}A.{}^{-4}\mathfrak{D}\alpha^4 - {}_{\alpha}{}^{3}A.{}^{-4}\mathfrak{C}\alpha^3 + {}_{\alpha}{}^{4}A.{}^{-4}\mathfrak{B}\alpha^2)z^5$$

$$= (56A\alpha^5 + 35B\alpha^4 + 20C\alpha^3 + 10D\alpha^2)z^5$$

VI. Umkehrung der Reihen.

Rückkehrende Formeln. a)

§. 103.

1. *Aufgabe.*

Es wird die Gleichung gegeben

$$z = ax^{\varrho} + bx^{\varrho+\delta} + cx^{\varrho+2\delta} + dx^{\varrho+3\delta} + \ldots\ldots,$$

es soll x^{σ} durch eine fortlaufende Reihe ausgedrückt werden, welche nach den Potenzen der z fortläuft.

a) Unter Rückkehrenden Formeln werden solche verstanden, bei welchen allemal ein Glied durch alle vorhergehende bestimmt wird.

Auflöſung.

Bezeichnet man die Reihe $ax^{\frac{\sigma}{\varrho}}+bx^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}+cx^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}}+\ldots$ mit p und ſetzt $x^{\sigma}=\dot{\mathfrak{A}}z^{\varrho}+\dot{\mathfrak{B}}z^{\varrho}+\dot{\mathfrak{C}}z^{\varrho}+\dot{\mathfrak{D}}z^{\varrho}+\cdots$, und beſtimmt die angenommenen Coefficienten dieſer Reihe durch Localzeichen, welche ſich auf die Coefficienten der $\frac{\sigma}{\varrho}$ten, $\frac{\sigma+\delta}{\varrho}$ten, $\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}$ten, $\frac{\sigma+3\delta}{\varrho}$ten Dignität der Reihe p beziehn, ſo iſt

$$z^{\sigma}{}_{/1}=\frac{1}{p^{\frac{\sigma}{\varrho}}\,k_1}z^{\frac{\sigma}{\varrho}},\quad x^{\sigma}{}_{/2}=-\frac{\left(\dot{\mathfrak{A}}p^{\frac{\sigma}{\varrho}}k_2\right)}{p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}k_1}z^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}},$$

$$x^{\sigma}{}_{/3}=-\frac{\left(\dot{\mathfrak{A}}p^{\frac{\sigma}{\varrho}}k_3+\dot{\mathfrak{B}}p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}k_2\right)}{p^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}}k_1}z^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}},$$

$$x^{\sigma}{}_{/4}=-\frac{\left(\dot{\mathfrak{A}}p^{\frac{\sigma}{\varrho}}k_4+\dot{\mathfrak{B}}p^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}k_3+\dot{\mathfrak{C}}p^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}}k_2\right)}{p^{\frac{\sigma+3\delta}{\varrho}}k_1}z^{\frac{\sigma+3\delta}{\varrho}}$$

a) Scale p(a, b, c, d, ...)

u. ſ. w. u. ſ. w. u. ſ. w.

Be-

a) Die Scale iſt hier p(a, b, c, d, ...), weil die Coefficienten der höhern Dignitäten der Reihe p durch die Coefficienten der p beſtimmt werden.

Beweis.

Es ist nach §. 87

$$p^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma}} = p^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma}} k_{1,x}{}^{\sigma} + p^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma}} k_{2,x}{}^{\sigma+\delta} + p^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma}} k_{3,x}{}^{\sigma+2\delta} + \ldots$$

$$p^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma+\delta}} = p^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma+\delta}} k_{1,x}{}^{\sigma+\delta} + p^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma+\delta}} k_{2,x}{}^{\sigma+2\delta} + p^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma+\delta}} k_{3,x}{}^{\sigma+3\delta} + \ldots$$

$$p^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma+2\delta}} = p^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma+2\delta}} k_{1,x}{}^{\sigma+2\delta} + p^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma+2\delta}} k_{2,x}{}^{\sigma+3\delta} + p^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma+2\delta}} k_{3,x}{}^{\sigma+4\delta} + \ldots$$

$$p^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma+3\delta}} = p^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma+3\delta}} k_{1,x}{}^{\sigma+3\delta} + p^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma+3\delta}} k_{2,x}{}^{\sigma+4\delta} + p^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma+3\delta}} k_{3,x}{}^{\sigma+5\delta} + \ldots$$

$$\text{“} \qquad \text{“} \qquad \text{“} \qquad \text{“}$$

Werden diese Reihen der $p^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma}}$, $p^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma+\delta}}$, $p^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma+2\delta}}$ u. s. f. statt $z^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma}}$, $z^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma+\delta}}$, $z^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma+2\delta}}$, u. s. w. in die für x^{σ} angenommene Reihe $x^{\sigma} = \mathfrak{A} z^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma}} + \mathfrak{B} z^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma+\delta}} + \mathfrak{C} z^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma+2\delta}} + \ldots$ gesetzt, so erhält man

$$x^{\sigma} = \mathfrak{A} p^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma}} k_{1,x}{}^{\sigma} + \mathfrak{A} p^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma}} k_{2,x}{}^{\sigma+\delta} + \mathfrak{A} p^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma}} k_{3,x}{}^{\sigma+2\delta}$$
$$+ \mathfrak{B} p^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma+\delta}} k_{1,x}{}^{\sigma+\delta} + \mathfrak{B} p^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma+\delta}} k_{2,x}{}^{\sigma+2\delta}$$
$$+ \mathfrak{C} p^{\underline{\rho}}_{\underline{\sigma+2\delta}} k_{1,x}{}^{\sigma+2\delta}$$

$$+ \dot{\mathfrak{A}}p^{\underline{\sigma}\,\varrho} k_4 . x^{\sigma+3\delta} + \ldots$$

$$+ \dot{\mathfrak{B}}p^{\underline{\sigma+\delta}\,\varrho} k_3 . x^{\sigma+3\delta} + \ldots$$

$$+ \dot{\mathfrak{C}}p^{\underline{\sigma+2\delta}\,\varrho} k_2 . x^{\sigma+3\delta} + \ldots$$

$$+ \dot{\mathfrak{D}}p^{\underline{\sigma+3\delta}\,\varrho} k_1 . x^{\sigma+3\delta} + \ldots$$

Bringt man hier x^{σ} auf die andere Seite, reducirt alſo die Gleichung auf Null, ſo wird

$$\dot{\mathfrak{A}}p^{\underline{\sigma}\,\varrho} k_1 - 1 = 0,$$

$$\dot{\mathfrak{A}}p^{\underline{\sigma}\,\varrho} k_2 + \dot{\mathfrak{B}}p^{\underline{\sigma+\delta}\,\varrho} k_1 = 0,$$

$$\dot{\mathfrak{A}}p^{\underline{\sigma}\,\varrho} k_3 + \dot{\mathfrak{B}}p^{\underline{\sigma+\delta}\,\varrho} k_2 + \dot{\mathfrak{C}}p^{\underline{\sigma+2\delta}\,\varrho} k_1 = 0$$

$$\dot{\mathfrak{A}}p^{\underline{\sigma}\,\varrho} k_4 + \dot{\mathfrak{B}}p^{\underline{\sigma+\delta}\,\varrho} k_3 + \dot{\mathfrak{C}}p^{\underline{\sigma+2\delta}\,\varrho} k_2 + \dot{\mathfrak{D}}p^{\underline{\sigma+3\delta}\,\varrho} k_1 = 0$$

u. ſ. w. u. ſ. w. u. ſ. w.

folglich iſt

$$\dot{\mathfrak{A}} = \frac{1}{p^{\underline{\sigma}\,\varrho} k_1}, \quad \dot{\mathfrak{B}} = -\frac{\dot{\mathfrak{A}}p^{\underline{\sigma}\,\varrho} k_2}{p^{\underline{\sigma+\delta}\,\varrho} k_1}.$$

$$\dot{\mathfrak{C}} = -\frac{\dot{\mathfrak{A}}p^{\underline{\sigma}}k_3 + \dot{\mathfrak{B}}p^{\underline{\sigma+\delta}}k_2}{p^{\underline{\sigma+2\delta}}k_1},$$

$$\dot{\mathfrak{D}} = -\frac{\dot{\mathfrak{A}}p^{\underline{\sigma}}k_4 + \dot{\mathfrak{B}}p^{\underline{\sigma+\delta}}k_3 + \dot{\mathfrak{C}}p^{\underline{\sigma+2\delta}}k_2}{p^{\underline{\sigma+3\delta}}k_1},$$

u. f. w. u. f. w. u. f. w.

Subſtituirt man nun dieſe Werthe der $\dot{\mathfrak{A}}, \dot{\mathfrak{B}}, \dot{\mathfrak{C}}$, u. ſ. f. in die Gleichung $x^{\sigma} = \dot{\mathfrak{A}}z^{\underline{\sigma}} + \dot{\mathfrak{B}}z^{\underline{\sigma+\delta}} + \dot{\mathfrak{C}}z^{\underline{\sigma+2\delta}} + \ldots$ ſo bekömmt man die in der Auflöſung angegebenen Glieder.

Zuſatz

Wird ϱ gleich 1 und δ gleich 1 angenommen, ſo wird aus der Gleichung der Aufgabe die Gleichung $z = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots$ und

$$x^{\sigma} = \frac{1}{p^{\sigma}k_1}z^{\sigma} - \frac{(\dot{\mathfrak{A}}p^{\sigma}k_2)}{p^{\sigma+1}k_1}z^{\sigma+1} - \frac{(\dot{\mathfrak{A}}p^{\sigma}k_3 + \dot{\mathfrak{B}}p^{\sigma+1}k_2)}{p^{\sigma+2}k_1}z^{\sigma+2}$$

$$- \frac{(\dot{\mathfrak{A}}p^{\sigma}k_4 + \dot{\mathfrak{B}}p^{\sigma+1}k_3 + \dot{\mathfrak{C}}p^{\sigma+2}k_2)}{p^{\sigma+3}k_1}z^{\sigma+3} - \ldots \text{ a)}$$

a) Der erſte Coefficient dieſer Reihe iſt alſo wieder $\dot{\mathfrak{A}}$, der zweite iſt $\dot{\mathfrak{B}}$, der dritte iſt $\dot{\mathfrak{C}}$, u. ſ. w.

1. *Beiſpiel.*

Es ſey $z = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots$, es ſoll x^3 durch z beſtimmt werden.

* * *

Es iſt, da hier $\sigma = 3$,

$$x^3 = \frac{1}{p^3 k_1} z^3 - \frac{(\dot{\mathfrak{A}} p^3 k_2)}{p^4 k_1} z^4 - \frac{(\dot{\mathfrak{A}} p^3 k_3 + \dot{\mathfrak{B}} p^4 k_2)}{p^5 k_1} z^5 -$$
$$- \frac{(\dot{\mathfrak{A}} p^3 k_4 + \dot{\mathfrak{B}} p^4 k_3 + \dot{\mathfrak{C}} p^5 k_2)}{p^6 k_1} \cdot z^6 - \text{u. f. w.}$$

Nach §. 68. Zuſatz iſt aber

$$p^3 k_1 = c^3 C,\ p^3 k_2 = c^4 C,\ p^3 k_3 = c^5 C,\ p^3 k_4 = c^6 C,$$
$$p^4 k_1 = b^4 D,\ p^4 k_2 = b^5 D,\ p^4 k_3 = b^6 D,\ p^5 k_1 = c^5 E,$$
$$p^5 k_2 = c^6 E,\ p^6 k_1 = f^6 F,\ \text{u. f. w.}$$
$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & \cdots \\ a, & b, & c, & d, & \ldots \end{matrix}\right)$$

folglich iſt auch

$$x^3 = \frac{1}{c^3 C} z^3 - \frac{\dot{\mathfrak{A}} c^4 C}{b^4 D} z^4 - \frac{\dot{\mathfrak{A}} c^5 C + \dot{\mathfrak{B}} b^5 D}{c^5 E} z^5 -$$
$$- \frac{\dot{\mathfrak{A}} c^6 C + \dot{\mathfrak{B}} b^6 D + \dot{\mathfrak{C}} c^6 E}{f^6 F} z^6 - \text{u. f. w.}$$
$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4 \cdots \\ a, & b, & c, & d \ldots \end{matrix}\right)$$

Sollen in der eben entwickelten Reihe die Factoren $\dot{\mathfrak{A}}$, $\dot{\mathfrak{B}}$, $\dot{\mathfrak{C}}$. u. ſ. w. durch Klaſſenzeichen für den Zeiger $\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, \cdots \\ a, & b, & c, \ldots \end{matrix}\right)$ beſtimmt werden, ſo kann dies leicht geſchehn,

ſchehn, weil $\dot{\mathfrak{A}} = \frac{1}{{}_c^3\mathrm{C}}$ iſt. Subſtituirt man nämlich dieſen Werth des $\dot{\mathfrak{A}}$, für $\dot{\mathfrak{A}}$ in den Coefficienten des zweiten Gliedes, ſo hat man auch den zweiten Coefficienten, alſo $\dot{\mathfrak{B}}$ beſtimmt; ſetzt man daher dieſen Werth des $\dot{\mathfrak{B}}$ und den vorher angegebenen des $\dot{\mathfrak{A}}$ wieder ſtatt $\dot{\mathfrak{B}}$ und $\dot{\mathfrak{A}}$ in den Coefficienten des dritten Gliedes, ſo iſt auch dieſer, folglich $\dot{\mathfrak{C}}$ beſtimmt. u. ſ. w.

2. *Beiſpiel.*

Es ſoll unter der Bedingung, daſs $z = ax + bx^2 + cx^3 + \cdots$, x durch z beſtimmt werden.

* * *

Die hierhergehörige Formel erhält man, wenn in der Formel des Zuſatzes $\sigma = 1$ geſetzt wird. Es iſt alſo

$$x = \frac{1}{p^1k_1} \cdot z - \frac{\dot{\mathfrak{A}}p^1k_2}{p^2k_1} \cdot z^2 - \frac{\dot{\mathfrak{A}}p^1k_3 + \dot{\mathfrak{B}}p^2k_2}{p^3k_1} \cdot z^3$$

$$- \frac{\dot{\mathfrak{A}}p^1k_4 + \dot{\mathfrak{B}}p^2k_3 + \dot{\mathfrak{C}}p^3k_2}{p^4k_1} \cdot z^4 - \text{u. ſ. w.}$$

Es iſt aber

$$p^1k_1 = a^1\mathrm{A},\ p^1k_2 = a^2\mathrm{A},\ p^1k_3 = a^3\mathrm{A},\ p^1k_4 = a^4\mathrm{A},$$
$$p^2k_1 = b^2\mathrm{B},\ p^2k_2 = b^3\mathrm{B},\ p^2k_3 = b^4\mathrm{B},\ p^3k_1 = c^3\mathrm{C},$$
$$p^3k_2 = c^4\mathrm{C},\ p^4k_1 = d^4\mathrm{D}.$$

Folglich iſt auch

$$x = \frac{1}{{}_a^1\mathrm{A}} \cdot z - \frac{\dot{\mathfrak{A}}a^2\mathrm{A}}{{}_b^2\mathrm{B}} \cdot z^2 - \frac{\dot{\mathfrak{A}}a^3\mathrm{A} + \dot{\mathfrak{B}}b^3\mathrm{B}}{{}_c^3\mathrm{C}} \cdot z^3$$

$$\frac{\dot{\mathfrak{A}}_a{}^4A + \dot{\mathfrak{B}}_b{}^4B + \dot{\mathfrak{C}}_c{}^4C}{{}_b{}^4D} \cdot z^4 - \ldots$$

$$\binom{1, 2, 3, 4 \ldots}{a, b, c, d \ldots}$$

Anmerkung.

Die Formeln der Auflösung der gegebenen Aufgabe erhält man, wie aus dem Beweise erhellet, wenn man

$$\frac{\sigma}{\varrho} \quad \frac{\sigma+\delta}{\varrho} \quad \frac{\sigma+2\delta}{\varrho}$$

für x^{σ} die Reihe $\dot{\mathfrak{A}}z^{\varrho} + \dot{\mathfrak{B}}z^{\varrho} + \dot{\mathfrak{C}}z^{\varrho} + \ldots$ annimmt und die willkührlich angenommenen Coefficienten dieser Reihe dadurch bestimmt, dafs man die gegebene Reihe $ax^{\delta} + bx^{\frac{\varrho+\delta}{\varrho}} + cx^{\frac{\varrho+\delta}{\varrho}} + \ldots$ zur $\frac{\sigma}{\varrho}$-ten, $\frac{\sigma+\delta}{\varrho}$-ten, $\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}$-ten Dignität erhebt u. s. w. und die Reihen die man dadurch bekömmt in die angenommene statt $z^{\frac{\sigma}{\varrho}}$, $z^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}$, substituirt u. s. f. Diese Methode ist zuerst von Hindenburg beobachtet. Eine andere welche von Moivre herrührt, wird ein Beispiel deutlich machen: Wenn nämlich $z = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots$ und hier x durch eine Reihe bestimmt werden soll, die nach Potenzen der z fortschreitet, so nimmt man willkührlich, wie bei der Hindenburgischen Methode, $x = \dot{\mathfrak{A}}z + \dot{\mathfrak{B}}z^2 + \dot{\mathfrak{C}}z^3 + \ldots$ an, substituirt hierauf aber nicht die Potenzen der gegebenen Reihe in die angenommene, sondern man setzt die erste, zweite, dritte, vierte Potenz u. s. w. der angenommenen Reihe, statt x, x^2, x^3, u. s. f. in die gegebene.

Hier-

Hierdurch wird alſo

$$z = a\dot{\mathfrak{A}}z + a\dot{\mathfrak{B}}z^2 + a\dot{\mathfrak{C}}z^3 + a\dot{\mathfrak{D}}z^4 + \ldots.$$
$$+ bb^2Bz^2 + bb^3Bz^3 + bb^4Bz^4 + \ldots.$$
$$+ cc^3Cz^3 + cc^4Cz^4 + \ldots.$$
$$+ dd^4Dz^4 + \ldots.$$
$$\left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3, \ldots\\ \dot{\mathfrak{A}}, & \dot{\mathfrak{B}}, & \dot{\mathfrak{C}}, \ldots\end{smallmatrix}\right)$$

Reducirt man nun dieſe Gleichung dadurch auf o daſs man z auf die andere Seite bringt und wird alsdenn nach und nach die Summe der Coefficienten, die zu einerlei Dignitäten der z gehören, gleich o geſetzt, ſo bekömmt man Gleichungen aus welchen ſich folgende Werthe für die angenommenen Coefficienten ergeben:

$$\dot{\mathfrak{A}} = \frac{1}{a}, \quad \dot{\mathfrak{B}} = -\frac{bb^2B}{a}, \quad \dot{\mathfrak{C}} = -\frac{bb^3B + cc^3C}{a}$$

$$\dot{\mathfrak{D}} = -\frac{bb^4B + cc^4C + dd^4D}{a}, \text{ u. ſ. f.}$$

$$\left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3 \ldots\\ \dot{\mathfrak{A}}, & \dot{\mathfrak{B}}, & \dot{\mathfrak{C}} \ldots\end{smallmatrix}\right)$$

In dem gegebenen 1 ten und 2 ten Beiſpiele müſſen die Klaſſen für den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix}1, & 2, & 3 \ldots,\\ a, & b, & c, \ldots\end{smallmatrix}\right)$ entwickelt werden, deſsen Elemente ganz einfache ſind; hingegen in den eben entwickelten Formeln für $\dot{\mathfrak{B}}$, $\dot{\mathfrak{C}}$, u. ſ. w. beziehn ſich die Klaſſenzeichen auf die ſehr zuſammengeſetzten Elemente $\dot{\mathfrak{A}}$, $\dot{\mathfrak{B}}$, $\dot{\mathfrak{C}}$, u. ſ. f. Hieraus wird man einſehn, daſs die Hindenburgiſche Methode der andern vorzuziehn iſt.

§. 104.

§. 104.

2. *Aufgabe.*

Es ſey

$$\alpha z^{R} + \beta z^{R+D} + \gamma z^{R+2D} + \ldots = a x^{\varrho} + b x^{\varrho+\delta} + c x^{\varrho+2\delta} + \cdots,$$

es wird für x^{σ} eine Reihe verlangt, die nach den Potenzen der z fortſchreitet.

Auflöſung.

Man nehme noch eine dritte veränderliche Gröſse y an und ſetze $y = a x^{\varrho} + b x^{\varrho+\delta} + c x^{\varrho+2\delta} + \ldots$ und drücke x^{σ}, nach der Auflöſung der erſten Aufgabe, zuerſt durch y aus, ſo daſs ſich alſo die Localzeichen der hierdurch gefundenen Reihe, auf die Scale p(a, b, c, d, ...) bezieht, wenn man wieder, wie vorhin, $a x^{\varrho} + b x^{\varrho+\delta} + c x^{\varrho+2\delta} + \ldots$ mit p bezeichnet. Iſt dies geſchehn und man hat $x^{\sigma} = A y^{\frac{\sigma}{\varrho}} + B y^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}} + C y^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}} + \cdots$, gefunden, ſo ſetze man in dieſe Gleichung, weil auch $y = q$ iſt, wenn unter q die Reihe $\alpha z^{R} + \beta z^{R+D} + \ldots$ verſtanden wird, $q^{\frac{\sigma}{\varrho}}$ ſtatt $y^{\frac{\sigma}{\varrho}}$, $q^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}$ ſtatt $y^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}$, $q^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}}$ ſtatt $y^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}}$ u. ſ. f. ſo hat man die für x^{σ} geſuchte Reihe.

Beweis.

Die Richtigkeit dieſes Verfahrens fällt deutlich in die Augen, weil man durch die erſte Vorſchrift für x^{σ} eine durch y ausgedrückte richtige Reihe findet und die-

ſe

ſe wieder durch die zweite Vorſchrift in eine nach den Dignitäten der z fortlaufende Reihe verwandelt.

Anmerkung.

Hat die gegebene Gleichung die Form

$\alpha z^m + \beta z^{m+1} + \gamma z^{m+2} + \ldots = ax^m + bx^{m+1} + cx^{m+2} + \ldots$

und es wird für x eine Reihe durch z verlangt, ſo läſst ſich dieſe Reihe nach dem Moivriſchen Verfahren angeben, ohne eine dritte veränderliche Gröſse zu Hülfe zu nehmen. Nimmt man nämlich

$z = \dot{A}z + \dot{B}z^2 + \dot{C}z^3 + \dot{D}z^4 + \ldots$ an, ſo wird, wenn m als eine ganze poſitive Zahl angeſehn wird (§. 83)

$$x^m = {}_m^m\mathfrak{M}z^m + {}_m^{m+1}\mathfrak{M}z^{m+1} + {}_m^{m+2}\mathfrak{M}z^{m+2} + \ldots.$$

$$x^{m+1} = {}_m^{m+1}\overset{+1}{\mathfrak{M}}z^{m+1} + {}_m^{m+2}\overset{+1}{\mathfrak{M}}z^{m+2} + {}_m^{m+3}\overset{+1}{\mathfrak{M}}z^{m+3} +$$

$$x^{m+2} = {}_m^{m+2}\overset{+2}{\mathfrak{M}}z^{m+2} + {}_m^{m+3}\overset{+2}{\mathfrak{M}}z^{m+3} + {}_m^{m+4}\overset{+2}{\mathfrak{M}}z^{m+4} +.$$

$$x^{m+3} = {}_m^{m+3}\overset{+3}{\mathfrak{M}}z^{m+3} + {}_m^{m+4}\overset{+3}{\mathfrak{M}}z^{m+4} + {}_m^{m+5}\overset{+3}{\mathfrak{M}}z^{m+5} +.$$

$$\begin{matrix} \text{''} & \text{''} & \text{''} & \text{''} \\ (1, & 2, & 3, & 4) \\ \dot{A}, & \dot{B}, & \dot{C}, & \dot{D} \end{matrix}$$

Subſtituirt man dieſe Werthe der $x^m, x^{m+1}, x^{m+2}, x^{m+3}$, u. ſ. f. in die gegebene Gleichung, ſo bekömmt man:

$$\alpha z^m + \beta z^{m+1} + \gamma z^{m+2} + \delta z^{m+3} + \ldots.$$

$$=$$

$$\begin{aligned} &{}_{am}^{m}\mathfrak{M}z^m + {}_{am}^{m+1}\mathfrak{M}z^{m+1} + {}_{am}^{m+2}\mathfrak{M}z^{m+2} + \ldots \\ &\quad {}_{bm}^{m+1}\mathfrak{M}z^{m+1} + {}_{bm}^{m+2}\mathfrak{M}z^{m+2} + \ldots \\ &\quad\quad {}_{cm}^{m+2}\mathfrak{M}z^{m+2} + \ldots \\ &\quad\quad\quad \text{u. ſ. w.} \end{aligned}$$

Wird

Wird hier ein jeder Coefficient der Reihe $az^m + \beta z^{m+1} + \cdots$, jedesmal der Summe derjenigen Coefficienten der andern Reihe gleich gesetzt, welche sich auf die nämliche Dignität der z beziehn wozu er gehört, so entstehen die Gleichungen:

$$\alpha = {}_{am}{}^{m}\mathfrak{M}$$

$$\beta = {}_{am}{}^{m+1}\mathfrak{M} + {}_{bm}{}^{1}{}^{m+1}\mathfrak{M}^{+1}$$

$$\gamma = {}_{am}{}^{m+2}\mathfrak{M} + {}_{bm}{}^{1}{}^{m+2}\mathfrak{M}^{+1} + {}_{cm}{}^{2}{}^{m+2}\mathfrak{M}^{+2}$$

$$\text{u. s. f.} \qquad \text{u.} \qquad \text{u.} \qquad \text{u.}$$

$$\left(\begin{matrix}1, & 2, & 3, & \cdots \\ \dot{\mathfrak{A}}, & \dot{\mathfrak{B}}, & \dot{\mathfrak{C}}, & \cdots\end{matrix}\right)$$

Werden nun vermittelst dieser Gleichungen die Werthe der $\dot{\mathfrak{A}}$, $\dot{\mathfrak{B}}$, $\dot{\mathfrak{C}}$, u. s. f. aufgesucht, so giebt die erste Gleichung den Werth des $\dot{\mathfrak{A}}$ durch α und a; die zweite Gleichung giebt den Werth des $\dot{\mathfrak{B}}$ durch β, a, b und $\dot{\mathfrak{A}}$ die dritte giebt den Werth des $\dot{\mathfrak{C}}$ durch γ, a, b, c, $\dot{\mathfrak{A}}$ und $\dot{\mathfrak{B}}$, u. s. w. so dass man also durch diese Gleichungen die Werthe aller Coefficienten $\dot{\mathfrak{A}}$, $\dot{\mathfrak{B}}$, $\dot{\mathfrak{C}}$, u. s. f. durch a, b, c, d, ... und α, β, γ, δ, ... bestimmen kann.

β. Independente Formeln. *a*)

§. 105.

3. *Aufgabe.*

Es soll unter der Anname, dass $z = ax^{\varrho} + bx^{\varrho+\delta'} + cx^{\varrho+\delta'+\delta''} + \cdots$, eine unabhängige Localformel für das $n+1$te Glied derjenigen Reihe angegeben werden, welche x^{σ} durch fortlaufende Potenzen der z darstellt.

Auf-

a) Hierunter werden die gedacht, welche ein jedes Glied independent von allen übrigen geben,

Auflöſung. a)

Bezeichnet man die Reihe $ax^{\varrho} + bx^{\varrho+\delta} + cx^{\varrho+2\delta} + \ldots$ mit p, ſo iſt

$$x^{\sigma} f(n+1) = \frac{\sigma}{\sigma+n\delta} \cdot p^{-\frac{\sigma+n\delta}{\varrho}} k(n+1) z^{\frac{\sigma+n\delta}{\varrho}}$$

1. *Zuſatz.*

$$\text{Es iſt } x^{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma} \cdot p^{-\frac{\sigma}{\varrho}} k_1 . z^{\frac{\sigma}{\varrho}}$$

$$+ \frac{\sigma}{\sigma+\delta} \cdot p^{-\frac{\sigma+\delta}{\varrho}} k_2 . z^{\frac{\sigma+\delta}{\varrho}}$$

$$+ \frac{\sigma}{\sigma+2\delta} \cdot p^{-\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}} k_3 . z^{\frac{\sigma+2\delta}{\varrho}}$$

$$+ \frac{\sigma}{\sigma+3\delta} \cdot p^{-\frac{\sigma+3\delta}{\varrho}} k_4 . z^{\frac{\sigma+3\delta}{\varrho}}$$

$$" \quad " \quad " \quad " \quad " \quad "$$

$$p(a, b, c, d, \ldots)$$

4. *Zu-*

a) Den Beweis für die Richtigkeit dieſer Auflöſung, welcher ſeiner Weitläuftigkeit wegen hier übergangen wird, enthält die Diſſertatio academica auctore M. Henrico Auguſto Rothe, welche den Titel führt; Formulae de Serierum reverſione demonſtratio univerſalis, ſignis localibus combinatorio-analyticorum vicariis exhibita. Lipſiae 1793. 4.

Wird $\frac{\sigma+n\delta}{\varrho} = {}^{n}m$ und daher $\frac{\sigma}{\varrho} = {}^{c}m$ gesetzt, so läßt sich die Formel der Auflösung auch so ausdrücken:

$$x^{\sigma}\gamma(n+1) = \frac{{}^{c}m}{{}^{n}m} \cdot p^{-{}^{n}m}\, k(n+1).z^{{}^{n}m}$$

Setzt man in diese Gleichung statt $p^{-{}^{n}m\, k(n+1)}$ den gleichgültigen Ausdruck, welchen der 1te Zusatz des §. 85 giebt, so erhält man $x^{\sigma}\gamma(n+1) =$

$$\frac{{}^{c}m}{{}^{n}m}\Big\{-{}^{n}m\mathfrak{A}_a - {}^{n}m-1_a\,{}^{n}A + -{}^{n}m\mathfrak{B}_a - {}^{n}m-2_b\,{}^{n}B + -{}^{n}m\mathfrak{C}_a - {}^{n}m-3_c\,{}^{n}C + -{}^{n}m\mathfrak{D}_a - {}^{n}m-4_b\,{}^{n}D + \ldots\Big\}z^{{}^{n}m}$$

$$\binom{1, 2, 3, 4, \ldots}{b, c, d, e, \ldots}$$

Anmerkung.

Dividirt man die einzelnen Glieder der letzten Formel durch $a^{-{}^{n}m}$ und multiplicirt dann das Ganze wieder mit $a^{-{}^{n}m}$, so wird $x^{\sigma}\gamma(n+1) =$

$$\frac{{}^{c}m}{{}^{n}m}\Big\{-{}^{n}m\mathfrak{A}_a\,\frac{{}^{n}A}{a} + -{}^{n}m\mathfrak{B}_b\,\frac{{}^{n}B}{a^2} + -{}^{n}m\mathfrak{C}_c\,\frac{{}^{n}C}{a^3} + \ldots\Big\}\left(\frac{z}{a}\right)^{{}^{n}m}$$

Substituirt man hierinn statt $-{}^{n}m\mathfrak{B}, -{}^{n}m\mathfrak{C}, -{}^{n}m\mathfrak{D}$ u. s. w. die Werthe $\frac{{}^{n}m+1\mathfrak{A}}{2}$, $-\frac{{}^{n}m+2\mathfrak{B}}{3}$, $\frac{{}^{n}m+3\mathfrak{C}}{4}$, u. s. f. so bekömmt man, da $\frac{-{}^{n}m\mathfrak{A}}{{}^{n}m} = -1$ ist,

$$x^{\sigma}\gamma^{(n+1)} = -^{om}\left\{\frac{{}^{n}A_{a}}{a} - \frac{{}^{n+1}\mathfrak{A}_{b}\,{}^{n}B}{2a^{2}} + \frac{{}^{n+2}\mathfrak{B}_{c}\,{}^{n}C}{3a^{3}} - \frac{{}^{n+3}\mathfrak{C}_{b}\,{}^{n}D}{4a^{4}} + \cdots\right\}\left(\frac{z}{a}\right)^{n}{}_{m}$$

Unter dieſer Form iſt die Formel für $x^{\sigma}\gamma^{(n+1)}$ von Eſchenbach *a*), einem Schüler Hindenburgs, gefunden. Hindenburg leitete hierauf aus dieſer, die letzte des Zuſatzes und aus dieſer wieder die in der Auflöſung aufgeſtellte Formel her.

§. 106.

4. *Aufgabe.* *b*).

Es wird unter der Bedingung, daſs

$$\alpha z^{R} + \beta z^{R+D} + \gamma z^{R+D} + \cdots = ax^{\varrho} + bx^{\varrho+\delta} + cx^{\varrho+2\delta} + \cdots$$

für x^{σ} eine allgemeine independente Formel einer Reihe geſucht, welche nach den Dignitäten der z fortgeht.

Auf-

a) Eſchenbach, de Serierum Rev. Diſſ. Lipſiae 1789. pag. 24. Er wuſste aber die Richtigkeit ſeiner Formel nicht zu beweiſen; dies gab zu der vorhin genannten Rothiſchen äuſserſt ſcharfſinnigen Diſſertation Veranlaſſung. In dieſer kömmt Rothe direct auf die Localformel und aus dieſer folgert er die Eſchenbachſche. Daſs ſich die Localformel auch aus dem allgemeinen Lagrangiſchen Satze $x - z\varphi x = \psi y + z\varphi y \frac{d\psi y}{dy} + \cdots$, wo $y = x - z\varphi x$, herleiten laſſe, zeigt Pfaff in den beiden Abhandlungen in welchen er einen ſtrengen Beweis für den genannten Satz giebt. (Arch. der Mat. H. I. S. 81, und Diſquiſ. analyt. S. 227.).

b) Dies wichtige Problem machte Hindenburg in folgender Schrift bekannt: Problema ſolutum maxime univerſale ad Serierum Reverſionem, Formulis localibus et combinatorio-analyticis abſolvendam Paralipomenon. Lipſiae 1793.

Auflösung.

1) Man bezeichne die erste Seite der Gleichung mit q und die andere mit p und setze $y = ax^{\varrho} + bx^{\varrho+\delta} + cx^{\varrho+2\delta} + \ldots$

2) Man bestimme x^{σ} durch eine Reihe welche nach y fortschreitet und zwar vermittelst des ersten Zusatzes zum §. 103. Hierdurch erhält man, wenn wieder unter ${}^{n}m$ der Ausdruck $\frac{\sigma+n\delta}{\varrho}$, unter $\frac{m}{n}$ aber der Ausdruck $\frac{\sigma}{\sigma+n\delta}$ verstanden wird,

$$x^{\sigma} = \underset{0}{m}.q^{-{}^{0}m_{k1}}.y^{{}^{0}m} + \underset{1}{m}.q^{-{}^{1}m_{k2}}.y^{{}^{1}m} + \underset{2}{m}.q^{-{}^{2}m_{k3}}.y^{{}^{2}m} + \ldots$$

$$q(a, b, c, d, \ldots)$$

3) Man setze auch $y = \alpha z^{R} + \beta z^{R+D} + \gamma z^{R+2D} + \ldots$, so wird nach §. 87.

$$y^{{}^{0}m} = p^{{}^{0}m_{k1}}.z^{{}^{0}m.R} + p^{{}^{0}m_{k2}}.z^{{}^{0}mR+D} + p^{{}^{0}m_{k3}}.z^{{}^{0}mR+2D} + \ldots$$

$$y^{{}^{1}m} = p^{{}^{1}m_{k1}}.z^{{}^{1}mR} + p^{{}^{1}m_{k2}}.z^{{}^{1}mR+D} + p^{{}^{1}m_{k3}}.z^{{}^{1}mR+2D} + \ldots$$

$$y^{{}^{2}m} = p^{{}^{2}m_{k1}}.z^{{}^{2}mR} + p^{{}^{2}m_{k2}}.z^{{}^{2}mR+D} + p^{{}^{2}m_{k3}}.z^{{}^{2}mR+2D} + \ldots$$

" " " " " "

$$p(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots)$$

4) Man substituire die in 3 entwickelten Werthe statt $y^{{}^{0}m}$, $y^{{}^{1}m}$, $y^{{}^{2}m}$, $y^{{}^{3}m}$ in die in 2) angegebene Reihe, so hat man die verlangte Formel.

Beweis.

Dass durch die Auflösung eine richtige Reihe entsteht welche x^{σ} durch z ausdrückt, erhellet hier eben so, wie bei der Aufgabe des §. 104. Dass aber diese Reihe auch independent sey, folgt daraus weil sie vermittelst independenter Formeln erhalten wird.

I. TABELLE.

${}_i{}^1J$, ${}_i{}^2J$, ${}_i{}^3J$, ${}_i{}^4J$, ${}_i{}^5J$, ${}_i{}^6J$, ${}_i{}^7J$, ${}_i{}^8J$, ${}_i{}^9J$, ${}_i{}^{10}J$

$${}_i{}^1J \begin{cases} {}_a{}^1A = a \end{cases}$$

$${}_i{}^2J \begin{cases} {}_a{}^2A = b \\ {}_b{}^2B = a^2 \end{cases}$$

$${}_i{}^3J \begin{cases} {}_a{}^3A = c \\ {}_b{}^3B = 2ab \\ {}_c{}^3C = a^3 \end{cases}$$

$${}_i{}^4J \begin{cases} {}_a{}^4A = d \\ {}_b{}^4B = \begin{cases} 2ac \\ b^2 \end{cases} \\ {}_c{}^4C = 3a^2b \\ {}_d{}^4D = a^4 \end{cases}$$

$${}_i{}^5J \begin{cases} {}_a{}^5A = e \\ {}_b{}^5B = \begin{cases} 2ad \\ 2bc \end{cases} \\ {}_c{}^5C = \begin{cases} 3a^2c \\ 3ab^2 \end{cases} \\ {}_d{}^5D = 4a^3b \\ {}_e{}^5E = a^5 \end{cases}$$

$${}_i{}^6J \begin{cases} {}_a{}^6A = f \\ {}_b{}^6B = \begin{cases} 2ae \\ 2bd \\ c^2 \end{cases} \\ {}_c{}^6C = \begin{cases} 3a^2d \\ 6abc \\ b^3 \end{cases} \\ {}_d{}^6D = \begin{cases} 4a^3c \\ 6a^2b^2 \end{cases} \\ {}_e{}^6E = 5a^4b \\ {}_f{}^6F = a^6 \end{cases}$$

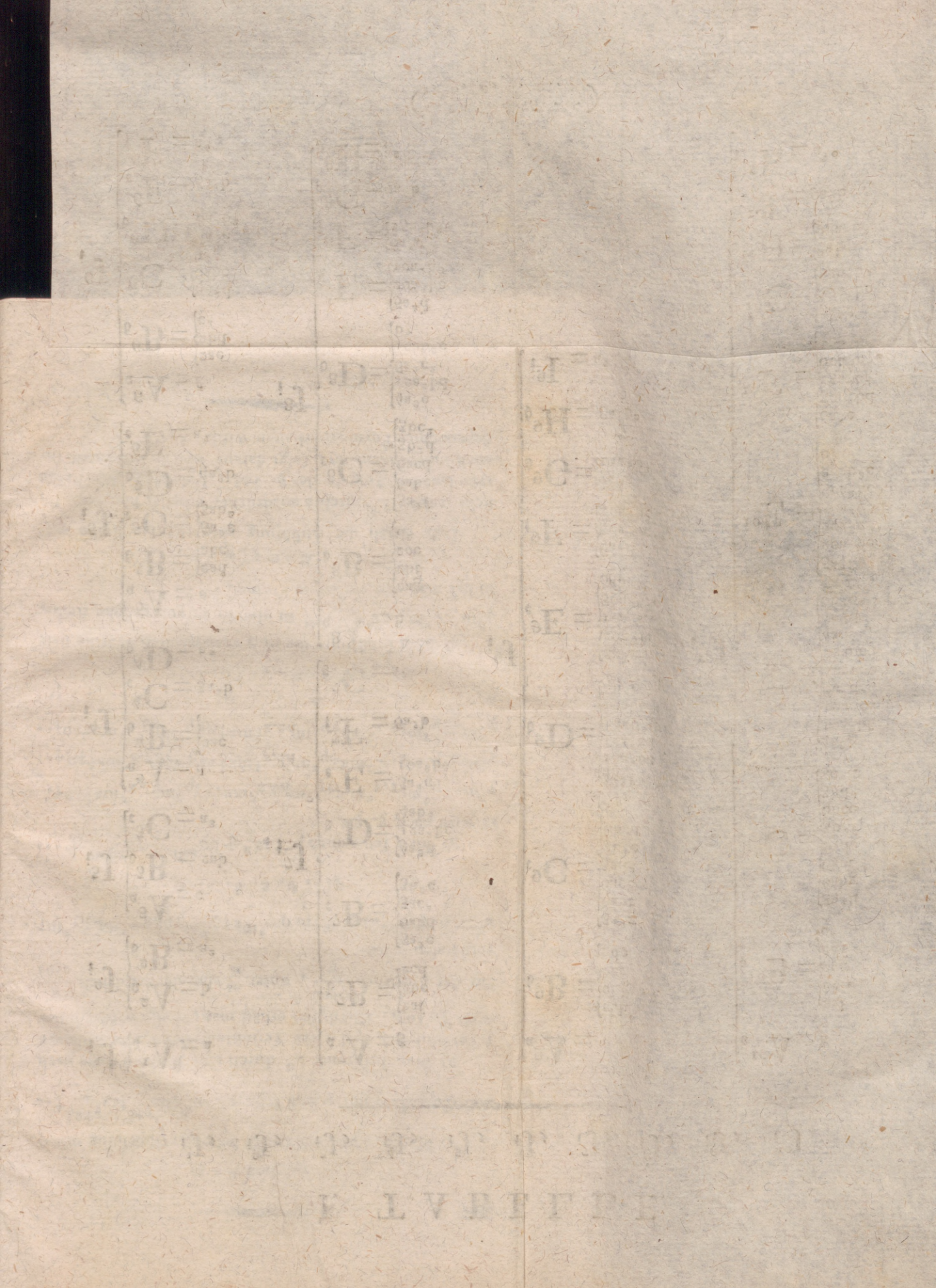
$${}_i{}^7J \begin{cases} {}_a{}^7A = g \\ {}_b{}^7B = \begin{cases} 2af \\ 2be \\ 2cd \end{cases} \\ {}_c{}^7B = \begin{cases} 3a^2e \\ 6abd \\ 3ac^2 \\ 3b^2c \end{cases} \\ {}_d{}^7D = \begin{cases} 4a^3d \\ 12a^2bc \\ 4ab^3 \end{cases} \\ {}_e{}^7E = \begin{cases} 5a^4c \\ 10a^3b^2 \end{cases} \\ {}_f{}^7F = 6a^5b \\ {}_g{}^7G = a^7 \end{cases}$$

$${}_i{}^8J \begin{cases} {}_a{}^8A = h \\ {}_b{}^8B = \begin{cases} 2ag \\ 2bf \\ 2ce \\ d^2 \end{cases} \\ {}_c{}^8C = \begin{cases} 3a^2f \\ 6abe \\ 6acd \\ 3b^2d \\ 3bc^2 \end{cases} \\ {}_d{}^8D = \begin{cases} 4a^3e \\ 12a^2bd \\ 6a^2c^2 \\ 12ab^2c \\ b^4 \end{cases} \\ {}_e{}^8E = \begin{cases} 5a^4d \\ 20a^3bc \\ 10a^2b^3 \end{cases} \\ {}_f{}^8F = \begin{cases} 6a^5c \\ 15a^4b^2 \end{cases} \\ {}_g{}^8G = 7a^6b \\ {}_h{}^8H = a^8 \end{cases}$$

$${}_i{}^9J \begin{cases} {}_a{}^9A = \\ {}_b{}^9B = \begin{cases} 2ah \\ 2bg \\ 2cf \\ 2de \end{cases} \\ {}_c{}^9C = \begin{cases} 3a^2g \\ 6abf \\ 6ace \\ 3ad^2 \\ 3b^2e \\ 6bcd \\ c^3 \end{cases} \\ {}_d{}^9D = \begin{cases} 4a^3f \\ 12a^2be \\ 12a^2cd \\ 12ab^2d \\ 12abc^2 \\ 4b^3c \end{cases} \\ {}_e{}^9E = \begin{cases} 5a^4e \\ 20a^3bd \\ 10a^3c^2 \\ 30a^2b^2c \\ 5ab^4 \end{cases} \\ {}_f{}^9F = \begin{cases} 6a^5d \\ 30a^4bc \\ 20a^3b^3 \end{cases} \\ {}_g{}^9G = \begin{cases} 7a^6c \\ 21a^5b^2 \end{cases} \\ {}_h{}^9H = 8a^7b^2 \\ {}_i{}^9I = a^9 \end{cases}$$

$${}_i{}^{10}J \begin{cases} {}_a{}^{10}A = k \\ {}_b{}^{10}B = \begin{cases} 2ai \\ 2bh \\ 2cg \\ 2df \\ e^2 \end{cases} \\ {}_c{}^{10}C = \begin{cases} 3a^2h \\ 6abg \\ 6acf \\ 6ade \\ 3b^2f \\ 6bce \\ 3bd^2 \\ 3c^2d \end{cases} \\ {}_d{}^{10}D = \begin{cases} 4a^3g \\ 12a^2bf \\ 12a^2ce \\ 6a^2d^2 \\ 12ab^2e \\ 24abcd \\ 4ac^3 \\ 4b^3d \\ 6b^2c^2 \end{cases} \\ {}_e{}^{10}E = \begin{cases} 5a^4f \\ 20a^3be \\ 20a^3cd \\ 30a^2b^2d \\ 30a^2bc^2 \\ 20ab^3c \\ b^5 \end{cases} \\ {}_f{}^{10}F = \begin{cases} 6a^5e \\ 30a^4bd \\ 15a^4c^2 \\ 60a^3b^2c \\ 15a^2b^4 \end{cases} \\ {}_g{}^{10}G = \begin{cases} 7a^6d \\ 42a^5bc \\ 35a^4b^3 \end{cases} \\ {}_h{}^{10}H = \begin{cases} 8a^7c \\ 28a^6b^2 \end{cases} \\ {}_i{}^{10}I = 9a^8b \\ {}_k{}^{10}K = a^{10} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \ldots \\ a, & b, & c, & d, & e, \ldots \end{pmatrix}$$



II. TABELLE.

Anzahl aller Combinationen zur Summe n für die Elemente

$1, 2, 3, 4, 5, \ldots m$

Zahl m	Werthe der Zahl n																												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15	15	16
3	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	30	33	37	40	44	48	52	56	61	65	70	75	80	85	91
4	1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47	54	64	72	84	94	108	120	136	150	169	185	206	225	249	270	297
5	1	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30	37	47	57	70	84	101	119	141	164	192	221	255	291	333	377	427	480	540	603	674
6	1	1	2	3	5	7	11	14	20	26	35	44	58	71	90	110	136	163	199	235	282	331	391	454	532	612	709	811	931	1057	1206
7	1	1	2	3	5	7	11	15	21	28	38	49	65	82	105	131	164	201	248	300	364	436	522	618	733	860	1009	1175	1367	1579	1824
8	1	1	2	3	5	7	11	15	22	29	40	52	70	89	116	146	186	230	288	352	434	525	638	764	919	1090	1297	1527	1801	2104	2462
9	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	41	54	73	94	123	157	201	252	318	393	488	598	732	887	1076	1291	1549	1845	2194	2592	3060
10	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	55	75	97	128	164	212	267	340	423	530	653	807	984	1204	1455	1761	2112	2534	3015	3590
11	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	76	99	131	169	219	278	355	445	560	695	863	1060	1303	1586	1930	2331	2812	3370	4035
12	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	100	133	172	224	285	366	460	582	725	905	1116	1380	1686	2063	2503	3036	3655	4401
13	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	134	174	227	290	373	471	597	747	935	1158	1436	1763	2164	2637	3210	3882	4691
14	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	175	229	293	378	478	608	762	957	1188	1478	1819	2241	2738	3345	4057	4920
15	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	230	295	381	483	615	773	972	1210	1508	1861	2297	2815	3446	4192	5096
16	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	296	383	486	620	780	983	1225	1530	1891	2339	2871	3523	4293	5231
17	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	384	488	623	785	990	1236	1545	1913	2369	2913	3579	4370	5332
18	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	489	625	788	995	1243	1556	1928	2391	2943	3621	4426	5409
19	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	626	790	998	1248	1563	1939	2406	2965	3651	4468	5465
20	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	627	791	1000	1251	1568	1946	2417	2980	3673	4498	5507
21	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	627	792	1002	1255	1575	1950	2436	3019	3718	4565	5604

1. *Aufgabe.* Die Anzahl aller Combinationen zur Summe n anzugeben, die für die Elemente 1, 2, 3,.. m möglich sind.

Auflösung. Man suche in der Tabelle die Zahlen n und m auf, ziehe von n aus eine vertikale und von m aus eine horizontale Linie; die Zahl ist alsdenn die gesuchte, in welcher sich gedachte Linien schneiden.

2. *Aufgabe.* Die Anzahl der Combinationen ${}^{n}\mathfrak{M}$ für die Elemente 1, 2, 3, ... n zu bestimmen.

Auflösung. Man suche für die Elemente 1, 2, 3,.. m die Anzahl aller Combinationen zur Summe n—m. (1 Aufg. Aufl.).

3. *Aufgabe.* Die Anzahl der Combinationen der ${}^{n}\mathfrak{M}$ für die Elemente 1, 2, 3,.. n zu berechnen.

Auflösung. Man suche für die Elemente 1, 2, 3, ... m, die Anzahl aller Combinationen zur Summe $n - \frac{m(m+1)}{1 \quad 2}$. (1 Aufg. Aufl.).

Anmerkung. Bezeichnet man willkührlich die Anzahl aller für die Elemente 1, 2, 3...m möglichen Combinationen zur Summe n, mit $n^{(m)}$, so dafs also $n^{(m)}$ keine Dignität bedeutet, so ist $n^{(m)} = (n-1)^{(1)} + (n-2)^{(2)} + (n-3)^{(3)} + \cdots + (n-m)^{(m)}$.

Combinatoriſche Schriften.

Infinitinomii Dignitatum, Exponentis indeterminati, Hiſtoria, Leges ac Formulae; auctore Car. Frid. Hindenburg. Editio aucta et emendata. Goettingae 1779. 4.

Ejusdem Novi Syſtematis Permutationum, Combinationum ac Variationum primae lineae. Lipſiae 1781. 4.

Hindenburgs 6 Bogen lange Vorrede zu Rüdigers Specim. analyt. de lineis curvis ſecundi ordinis; in dilucidationem Analyſeos Finitorum Käſtnerianae. Lipſiae 1784. 4.

Mehrere Stücke des Leipziger Magazins zur Naturkunde, Mathematik und Oekonomie und des Magazins für reine und angewandte Mathematik, von den Jahren 1781—1788. 8.

Hier. Chriſtoph. Vilelm. Eſchenbachii Epiſtola ad fratrem Chriſtian. Gotthold Eſchenbach. (Ineſt in locum Kaeſtnerianum de multipli Angulorum Tangentibus commentatio.). Lipſiae 1789. 4.

De Serierum Reverſione formulis analytico-combinatoriis exhibita ſpecimen. Auctore Hier. Chriſtoph. Vilelm. Eſchenbach. Lipſiae 1789. 4.

Combinatoriſche Analytik und Theorie der Dimenſionszeichen in Parallele geſtellt von Heinrich Auguſt Töpfer. Leipzig 1793. 8.

Formulae de Seriernm Reverſione demonſtratio univerſalis, ſignis localibus combinatorio-analyticorum vicariis exhibita. Auctore Henrico Auguſto Rothe. Lipſiae 1793. 8.

Problema ſolutum maxime univerſale ad Serierum Reverſionem formulis localibus et combinatorio-analyticis abſolvendam Paralipomenon. Auctore Caroli Friderici Hindenburg. Lipſiae 1793. 4.

Archiv der reinen und angewandten Mathematik, herausgegeben von Carl Friedrich Hindenburg. Von den Jahren 1791 — 1798.

De uſu Logarithmorum Infinitinomii in theoria Aequationum, diſſertatio combinatorio-analytica. Auctore Mauricio de Praſſe. Lipſiae 1796. 4.

Der Polynomiſche Lehrſatz, das wichtigſte Theorem der ganzen Analyſis nebſt einigen verwandten und andern Sätzen. Neu bearbeitet und dargeſtellt von Tetens, Klügel, Kramp, Pfaff und Hindenburg. Leipzig 1796. 8.

Diſquiſitiones Analyticae maxime ad Calculum integralem et Doctrinam Serierum pertinentes. Volumen I. Auctore Joanne Friderico Pfaff. Helmſtadii 1797. 4. Caput II. Tractatus de Reverſione Serierum, ſive de Reſolutione Aequationum per Series.

Durch

Durch P; Z; v. o; v. u wird angedeutet: Pagina, Zeile, von oben, von unten.

Ort	Fehler	Verbeſſerung
P. 4, Z. 15, v. u.	combinatoriſche Behandlung.	arithmetiſch combinatoriſche Behandlung
P. 13, Z. 8, v. u.	Linken nach der Rechten	Rechten nach der Linken
P. 63, Z. 13, v. o.	$n-1'A$	$a^{n-1}A$
P. 67, Z. 7, v. u.	$\mathfrak{N}$	$'\mathfrak{N}^{-1}$
— — Z. 3, v. u.	$\mathfrak{N}$	$'\mathfrak{N}^{-1}$
P. 68, Z. 2, v. u.	$\mathfrak{N}$	$'\mathfrak{N}^{-1}$
— — Z. 10. v. o.	$d'\mathfrak{N}+e'\mathfrak{N}$	$d'\mathfrak{N}^{-1}+e'\mathfrak{N}^{-1}$
P. 97, Z. 9. v. u.	ſubſtituirt.	ſubſtituirt. *a)*
P. 97,	Unten fehlt die Note: *a)* Die Binion bc ausgenommen.	
P. 126, Z. 7, v. u.	Ntion	Mtion
P. 127, Z. 8, v. u.	M—2tion	M—(n—2)tion
P. 149, Z. 6, v. o.	r^6	r^4
P. 198, Z. 4, v. o.	in welchen	in welchem
— — Z. 6, v. o.	in welchen	in welchem
— — Z. 9, v. o.	Variationenen	Variationen
P. 202, Z. 4, v. o.	z^{a+b+c}	z^{a+b+c}
P. 210, Z. 13, v. o.	zm^{δ}	$z^{m\delta}$
P. 216, Z. 7, v. u.	dz^7	dz^8
— — Z. 6, v. u.	Cz^6 Dz^8	Cz^7 Dz^9
P. 256, Z. 11, v. o.	ϱ	π
— — Z. 14, v. o.	π	ϱ
P. 270, Z. 1, v. u.	$\mathfrak{A}$	$-^2\mathfrak{A}$
P. 277, Z. 3, v. o.	$\frac{a^1A}{\alpha}$	$\frac{a^1A}{\alpha^2}$
P. 316, Z. 10, v. o.	$z=$	$x=$

Jena,
gedruckt bei Prager und Comp.